Funksjoner av flere variable (2.1)

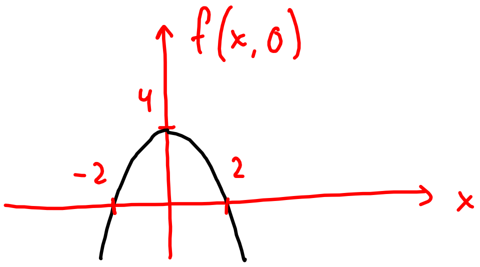
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles for

- et skalarfelt hvis $m = 1$
- en vektorvaluert funksjon (eller et vektorfelt) hvis $m > 1$.

eks. 1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

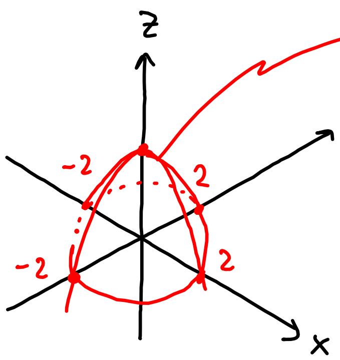
Skalarfelt av to variable

Vi har $f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2)$



$f(x,0) = 4 - x^2$

Tegner grafen:



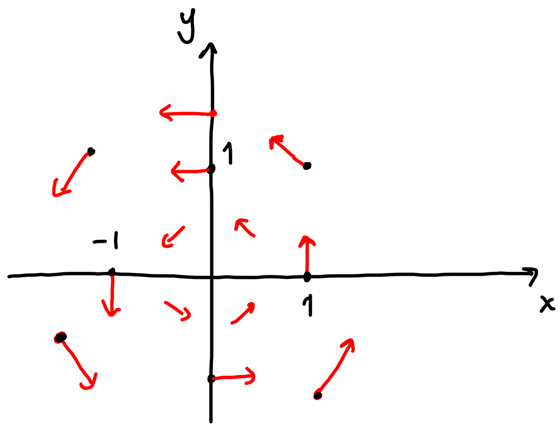
$f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2)$

eks. 2 $F(x,y) = \left(-\frac{y}{3}, \frac{x}{3}\right)$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

vektorvaluert funksjon

(vektorfelt)



$F(1,0) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

$F(1,1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$F(0,1) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

$F(-1,0) = \left(0, -\frac{1}{3}\right)$

$F(0,-1) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

Beskriver felt som roterer om origo.

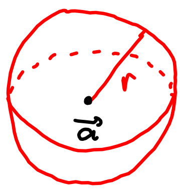
Kontinuitet (2.2)

Avstand mellom punktene $\vec{x}$ og $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^n$:

$$|\vec{x}-\vec{a}| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}$$

$$= \text{lengden av vektoren fra } \vec{a} \text{ til } \vec{x}.$$

$B(\vec{a}, r)$: Mengden av punkter i $\mathbb{R}^n$ med avstand mindre enn r til $\vec{a}$.



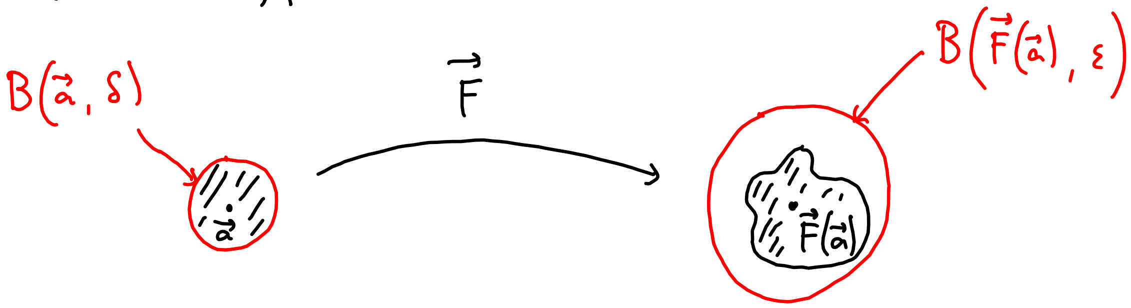
Kule om $\vec{a}$ med radius r

Definisjon (kontinuitet)

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\vec{a} \in A$. En funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ kalles kontinuerlig i $\vec{a}$ hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon \quad \text{for alle } \vec{x} \in A \text{ slik at } |\vec{x}-\vec{a}| < \delta$$

Figur: $A \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^m$



Teorem 2.2.2

Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^n$, og at funksjonene $F, G : A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige i $\vec{a} \in A$. Da er $F+G$, $F-G$, $F \cdot G$ og F/G kontinuerlige i $\vec{a}$, det siste forutsatt at $m=1$ og $G(\vec{a}) \neq 0$.

Bevis Analogt med tidligere. Se bok. $\square$

Setning 2.2.3

Hvis $\vec{G}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ og $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{G}(\vec{a})$, så er $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ kontinuerlig i $\vec{a}$.

Bevis Som før, se bok. $\square$

Setning 2.2.4

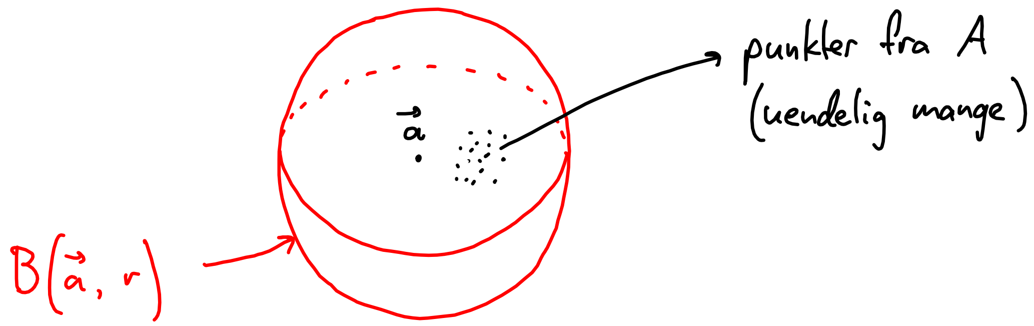
$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x}))$ er kontinuerlig i $\vec{x}$ hvis og bare hvis hver komponentfunksjon F_i er kontinuerlig i $\vec{x}$.

Bevis Se hefte. $\square$

Dette kan brukes til å løse f. eks. oppgave 2.2.1 og 2.2.2 (Se eksempler i boken).

Grenseverdier (2.3)

Et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et opphopningspunkt for en mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hvis enhver kule $B(\vec{a}, r)$ om $\vec{a}$ inneholder uendelig mange punkter fra A, for $r > 0$



Definisjon (grense)

La $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ er et opphopningspunkt for A. Vi sier at $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ er grenseverdien for $\vec{F}$ i punktet $\vec{a}$ dersom det for hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon \quad \text{for alle } \vec{x} \in A \text{ slik at } 0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$$

Får da: Setning 2.3.3 (komponentvis beregning)
Setning 2.3.4 (regneregler)
Setning 2.3.5 : $\vec{F}$ kont. i $\vec{a} \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a})$

(hvis $\vec{a}$ er et opphopningspunkt for def. området til $\vec{F}$)

$\boxed{\text{Derivasjon av skalarfelt (2.4)}}$

La $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og la $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D_f$. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(\vec{a})}{h}$$

den <u>partiellderiverte</u> av f med hensyn på x_i.

Hvis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $\vec{a} = (x, y)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

<u>eks.</u> $f(x,y) = x^2 y^3$ gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y^3 - x^2 y^3}{h} = y^3 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= y^3 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x^2}}{\cancel{h}} = y^3 \cdot \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$= y^3 \cdot 2x = \underline{\underline{2xy^3}}$$

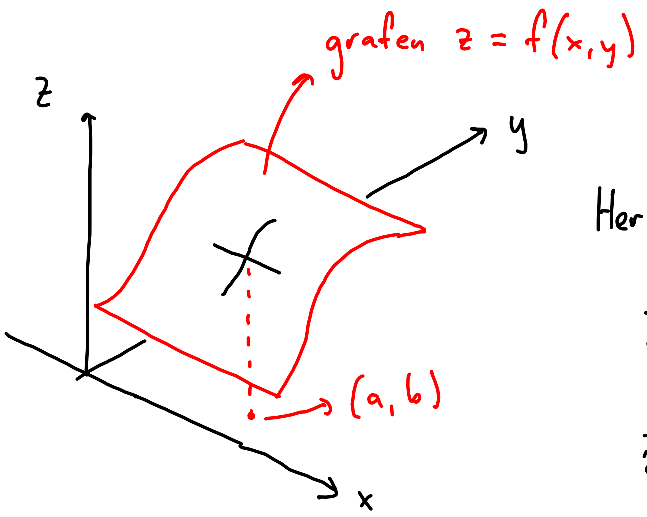
Så: Vi kan finne $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ved å oppfatte alle variable unntatt x_i som konstante tall, og derivere på vanlig måte.

eks $f(x,y,z) = xe^{xyz} + 2y + \sin z$ gir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot e^{xyz} + x \cdot e^{xyz} \cdot yz + 0 + 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{xyz} \cdot xz + 2 + 0 = x^2 z e^{xyz} + 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x \cdot e^{xyz} \cdot xy + 0 + \cos z \end{cases}$$

Geometrisk tolkning:

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ måler stigningen til f i retning nr. i



Her ser det ut til at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0$$

Høyere ordens partielle deriverte

La $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$

Da: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy$

Videre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6y$$

Like! Ikke tilfeldig.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6x$$

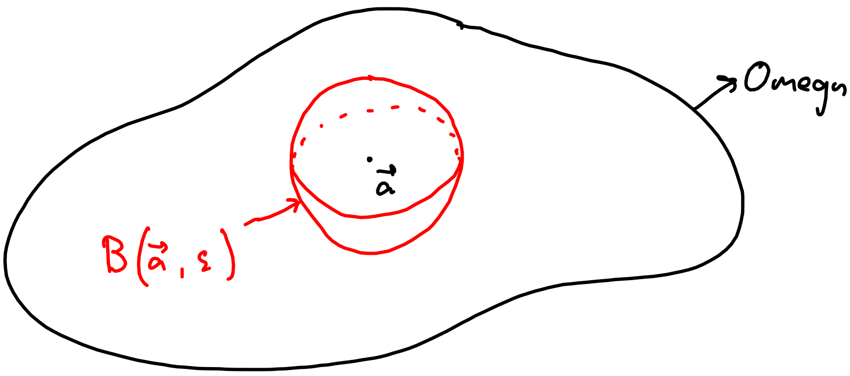
Dette er de fire annenordens partiellderiverte av f.

Enda videre:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x) = 6.$$

Og så ... videre.

La $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. En omegn om $\vec{a}$ er en delmengde av $\mathbb{R}^n$ som inneholder en kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ om $\vec{a}$, der $\varepsilon > 0$.



Teorem Hvis f er en funksjon av n variable (skalarfelt), og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ begge fins i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a})$$

Bevis: Idé: Middelverdisetningen. Se bok. $\square$

Definisjon La $f : A \to \mathbb{R}$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$, og la $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ være et indre punkt i A, dvs. A er en omegn om $\vec{a}$.

1. Den retningsderiverte av f langs vektoren $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ i punktet $\vec{a}$ er da

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

2. Gradienten til f i punktet $\vec{a}$ er vektoren

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

Sammenheng: f kalles deriverbar i $\vec{a}$ dersom alle de partielle deriverte fins der og restleddet

$$\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} \qquad (*)$$

går mot 0 fortere enn $\vec{r}$, dvs.

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0.$$

I så fall har vi

$$\boxed{f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}}$$

Bevis
$$f'(\vec{a};r) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$$

$\boxed{(*) \text{ med } h\vec{r} \text{ som } \vec{r}}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(h\vec{r})+\sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(\cancel{h}\vec{r})}{\cancel{h}} + \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h\vec{r})}{h\cdot|\vec{r}|}\cdot|\vec{r}|$$

$= 0$ pga. (*) med $h\vec{r}$ som $\vec{r}$

$$= \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} \qquad \square$$

Teorem

Huis alle de partielle deriverte av f fins i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er f deriverbar i punktet $\vec{a}$.

Bevis Se bok. $\square$

eks. La $f(x,y) = xy + 2y$, $\vec{a} = (2,5)$ og $\vec{r} = (2,1)$.
Finn $f'(\vec{a};\vec{r})$

Løsn. $\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2$

Så gradienten til f er $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x+2)$

Altså: $\nabla f(\vec{a}) = \nabla f(2,5) = (5,4)$

Dermed: $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

$$= (5,4)\cdot(2,1) = 10 + 4 = \underline{\underline{14}}$$

Teorem Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$, peker gradienten $\nabla f(\vec{a})$ i den retningen hvor f vokser raskest ut fra punktet $\vec{a}$.

Bevis Vi har

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} = |\nabla f(\vec{a})|\cdot|\vec{r}|\cdot\cos\theta$$

der θ er vinkelen mellom $\nabla f(\vec{a})$ og $\vec{r}$.

Faktoren $\cos\theta$ blir størst når $\theta = 0$. $\square$

eks. Avgjør i hvilken retning

$$f(x,y,z) = xyz$$

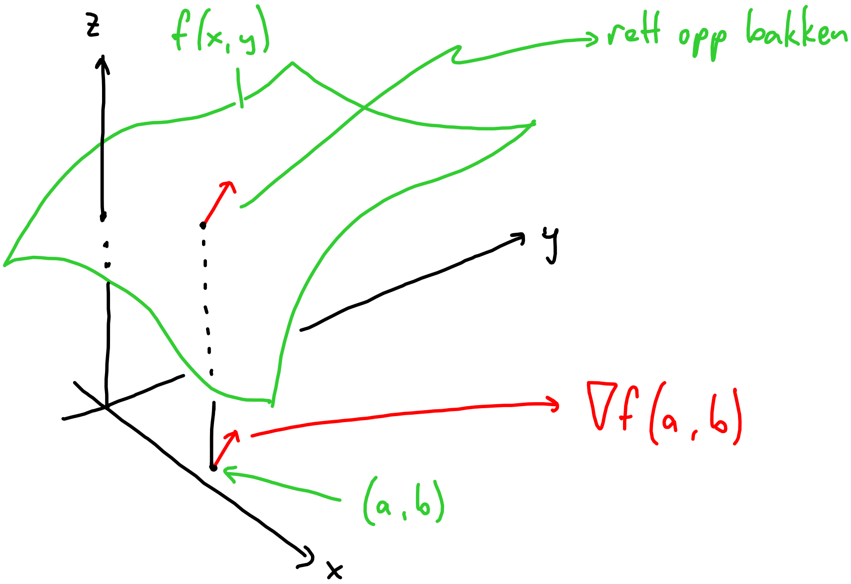
vokser raskest ut fra punktet $(1,1,2)$.

Løsn. $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy)$$

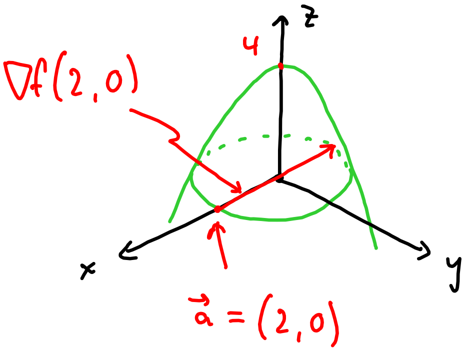
$$\nabla f(1,1,2) = (2,2,1)$$

f vokser raskest i retningen $(2,2,1)$. $\square$

Fjelltur: Gradientretningen til terrenget peker "rett opp bakken" (på kartet).



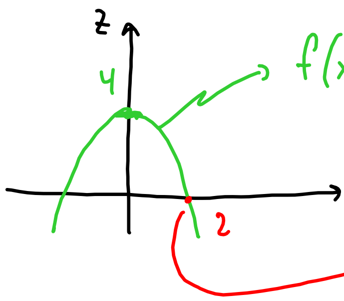
eks. $f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - x^2 - y^2$



$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (-2x, -2y)$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \nabla f(2,0) = (-4, 0)$$

Snitt med xz-planet:



$f(x,0) = 4 - x^2 \overset{\text{dåp}}{=} g(x)$ gir

$g'(x) = -2x \quad g'(2) = -4$

"stigning" 4

Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner (2.6)

Vektorvaluert funksjon av n variable:

$$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m \quad \text{der} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definisjon

Med Jacobimatrisen til en funksjon $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ av n variable i punktet $\vec{a}$ menes matrisen

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$