eks. 1 $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ved $\vec{F}(x,y,z) = (x^2yz,\ xy^3)$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ y^3 & 3xy^2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

eks. 2 $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 2 & 3 & 2x+3y \\ -1 & 4 & -x+4y \end{array} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+4y \end{pmatrix}$$

$$= (2x+3y,\ -x+4y)$$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Definisjon

La $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og la $\vec{a}$ være et punkt i A. Vi sier at $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ hvis restleddet

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) - \underbrace{\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}}_{\text{matriseprodukt}}$$

går mot $\vec{0}$ fortere enn $\vec{r}$, dvs. at

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{1}{|\vec{r}|}\cdot\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Vi har da følgende sammenheng:

Teorem

En funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ av n variable er deriverbar i $\vec{a}$ hvis og bare hvis alle komponentfunksjonene $F_1, \dots, F_m$ er deriverbare i $\vec{a}$.

Bevis Vi har

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - F(\vec{a}) - \underbrace{\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}}_{\text{matriseprodukt}}$$

Her er

$$\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} \boxed{\nabla F_1(\vec{a})} \\ \vdots \\ \boxed{\nabla F_m(\vec{a})} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\vec{a})\cdot\vec{r} \\ \vdots \\ \nabla F_m(\vec{a})\cdot\vec{r} \end{pmatrix}$$

Ergo er komponent nr. i av $\vec{\sigma}(\vec{r})$ gitt ved

$$\vec{\sigma}_i(\vec{r}) = \underbrace{F_i(\vec{a}+\vec{r}) - F_i(\vec{a}) - \nabla F_i(\vec{a}) \cdot \vec{r}}_{(*)}$$

Høyresiden (*) er nå restleddet $\sigma_{F_i}(\vec{r})$ brukt i definisjonen av deriverbarhet for hver komponentfunksjon F_i.

Dermed

$$\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{\sigma}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{F_1}(\vec{r})}{|\vec{r}|} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_{F_m}(\vec{r})}{|\vec{r}|} \end{pmatrix} \xrightarrow[\vec{r} \to \vec{0}]{\text{når}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ved antakelsen om deriverbarhet for alle F_i. Dette holder baklengs også. $\square$

Korollar

Anta at $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ har n variable og at $\vec{a} \in A$ er et indre punkt. Hvis alle komponentene i Jacobi-matrisen er definert i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er $\vec{F}$ deriverbar i $\vec{a}$.

Konklusjon

At $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ betyr at

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) \approx \underbrace{\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}}_{\text{matriseprodukt}}$$

er en god tilnærming når $\vec{r} \to \vec{0}$. Kan også skrive

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) \approx \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Analogi med funksjoner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\cdot h$$