Løsningsforslag noen oppgaver

Fredrik Meyer

7. desember 2016

Her er løsningsforslag til oppgave 9.5.3abc.

0.1 Oppgave a

Vi skal avgjøre om integralet

$$\int_0^\infty \frac{x+4}{x^2+2x+1} dx$$

konvergerer eller divergerer.

Trikset her er å legge merke til at nevneren også kan skrives som $(x+1)^2$. Dermed kan brøken skrive som

$$\frac{x+4}{x^2+2x+1} = \frac{x+1+3}{x^2+2x+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Dermed har vi at

$$\int_0^\infty \frac{x+4}{x^2+2x+1} dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} dx \quad (1)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(\ln|1+a| - \frac{3}{a+1} + 3 \right) \quad (2)$$

$$= \infty - 0 + 3 = \infty. \quad (3)$$

Så integralet divergerer.

En annen måte å løse dette på er å bruke grensesammneligningskriteriet fra Teorem 9.5.13. Det sier at om $\int_0^\infty f(x)dx$ divergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$, så divergerer også $\int_0^\infty g(x)dx$. I vårt tilfelle kan vi sette $f(x) = \frac{1}{x}$, og $g(x) =$

$\frac{x+4}{x^2+2x+1}$. Vi regner ut grenseverdien:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{x+4}{x^2+2x+1}} \tag{4}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x(x+4)} \tag{5}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+1/x^2}{1+4/x} = 1. \tag{6}$$

Siden grenseverdien er positiv, følger det da fra Teorem 9.5.13 at $g(x)$ må divergere, siden $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$ gjør det.

0.2 Oppgave b

Nå skal vi avgjøre om integralet

$$\int_1^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}} dx$$

divergerer. Først sier intuisjonen vår at når x blir stor, så kommer x^5 til å dominere nevneren, og $x+2$ blir mer og mer lik x, slik at uttrykket ligner mer og mer på $x/\sqrt{x^5} = 1/x^{3/2}$. Vi vet at $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ konvergerer fra setning 9.5.4.

Derfor har vi lyst å bruke sammenlignigskriteriet med $f(x) = 1/x^{3/2}$. Vi må derfor regne ut grenseverdien:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}}}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}(x+2)}{\sqrt{x^3+x^5}} \tag{7}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3(x+2)^2}}{\sqrt{x^3+x^5}} \tag{8}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3(x+2)^2}{x^3(1+x^2)}} \tag{9}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^2}{1+x^2}} = 1. \tag{10}$$

Dermed følger det fra grensesammenligningskriteriet at integralet konvergerer.

0.3 Oppgave c

Her er det et litt annet problem. Nå går integralgrensene fra 0 til 1, og vi kan ikke umiddelbart bruke grensesammenligningskriteriet. Vi skal avgjøre om integralet

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx$$

divergerer eller konvergerer. Problemene oppstår altså når vi deler lar grensene gå mot null, og vi ender opp med å dele på null i den ene grensen på integralet. Intuisjonen vår sier at når x er veldig liten, er x^3 enda mindre, så integralet burde oppføre seg omtrent som $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nær null. Vi vet at integralet $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ faktisk konvergerer, så vi mistenker at dette integralet også burde konvergere.

Legg merke til at

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Legg også merke til at $1/\sqrt{1+x^2} \leq 1$, siden $x \in [0,1]$. Dette betyr at

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{sqrtx}.$$

Men da følger det fra sammenligningskriteriet (som også fungerer på begrensede integralet) at funksjonen vår konvergerer, siden den er *mindre enn* en funksjon som også konvergerer.