Løsningsforslag midtveiseksamen Mat 1100

Høsten 2012

Oppgave 1: Riktig svaralternativ er C

Begrunnelse: Vi får $r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$. Videre ser vi (tegn figur) at argumentet til z vil være 60° mer enn 180°, dvs. argumentet er $\pi + (\pi/3) = 5\pi/3$.

Oppgave 2: Riktig svaralternativ er A

Begrunnelse: Argumentet $7\pi/2$ er mer enn 2π. Trekker vi fra $2\pi = 4\pi/2$, som er en hel runde, får vi $3\pi/2$. Dette viser at alternativ A er riktig. (Tegn figur.)

Oppgave 3: Riktig svaralternativ er B

Begrunnelse: Vi har $P(z) = z(z^2 - 4z + 5)$, så vi er ute etter en løsning til $z^2 - 4z + 5 = 0$. Innsetting av $z = 2 - i$ gir

$$z^2-4z+5 = (2-i)^2-4(2-i)+5 = (4-4i+i^2)-8+4i+5 = 4-4i-1-3+4i = 0.$$

Oppgave 4: Riktig svaralternativ er D

Begrunnelse: Vi deler på dominerende uttrykk x^2 oppe og nede på brøken, og får

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{8x^2+9}{1+x+2x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{8+(9/x^2)}{(1/x^2)+(1/x)+2}} = \sqrt{\frac{8+0}{0+0+2}} = 2.$$

Oppgave 5: Riktig svaralternativ er E

Begrunnelse: Vi bruker l'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \sin x}{\sin x - x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x - \cos x}{\cos x - 1}.$$

I grensen til høyre går telleren mot -1, mens nevneren går mot 0 fra negativ side. Ergo går brøken mot $+\infty$.

Oppgave 6: Riktig svaralternativ er C

Begrunnelse: Vi har

$$\lim_{x\to 0^+}(2x)^{\sin x} \overset{[0^0]}{=} = \lim_{x\to 0^+}(e^{\ln(2x)})^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(2x)\cdot\sin x}.$$

Eksponenten:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln(2x)\cdot\sin x &\overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x)}{(\sin x)^{-1}}\\ &\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{-(\sin x)^{-2}\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}\\ &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{-\cos x + x\sin x} = \frac{0}{-1+0} = 0.\end{aligned}$$

Ergo $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x)^{\sin x} = e^0 = 1$.

Oppgave 7: Riktig svaralternativ er E

Begrunnelse: Kjerneregelen med kjerne $u = \arctan x$ gir

$$f'(x) = \frac{1}{1+\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Oppgave 8: Riktig svaralternativ er C

Begrunnelse: $y = 2 + \ln(5x^2+1)$ gir

$$\begin{aligned}\ln(5x^2+1) &= y-2\\ 5x^2+1 &= e^{y-2}\\ 5x^2 &= e^{y-2}-1\\ x^2 &= \frac{1}{5}(e^{y-2}-1)\end{aligned}$$

Siden vi har $x\in[0,\infty)$ kan vi trekke positiv rot, og vi får $x = \sqrt{\frac{1}{5}(e^{y-2}-1)}$. Bytt så navn.

Oppgave 9: Riktig svaralternativ er B

Begrunnelse: Vi har formelen

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Innsetting av $x = 1$ gir at

$$g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}, \qquad \text{dvs.} \qquad g'(2) = \frac{1}{f'(1)}.$$

Innsetting av $g'(2) = 5$ gir nå $f'(1) = 1/5$.

Oppgave 10: Riktig svaralternativ er B

Begrunnelse: Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2+17}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+17})(x+\sqrt{x^2+17})}{x+\sqrt{x^2+17}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+17)}{x+\sqrt{x^2+17}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-17}{x+\sqrt{x^2+17}} = 0.\end{aligned}$$

Oppgave 11: Riktig svaralternativ er D

Begrunnelse: Vi har

$$|f(x) - 5| = |5 + \frac{2}{x} - 5| = \frac{2}{x}$$

for alle positive tall x. Kravet blir dermed at

$$\frac{2}{x} < \epsilon,$$

altså $x > 2/\epsilon$. Dermed må vi ha $N \geq 2/\epsilon$.

Oppgave 12: Riktig svaralternativ er C

Begrunnelse: Når $x \to 0^+$, går funksjonene i A, B, D og E alle mot 0. Funksjonen i C nærmer seg imidlertid ikke noen grenseverdi, fordi argumentet til sinus går mot $+\infty$. Da svinger sinus opp og ned mellom $+1$ og -1.

Oppgave 13: Riktig svaralternativ er E

Begrunnelse: Absoluttverdien til z er

$$r = \sqrt{16\cdot 3 + 16} = \sqrt{64} = 8,$$

så absoluttverdien til tredjerøttene av z må være $8^{1/3} = 2$. Videre ser vi (tegn figur) at argumentet til z er $30°$ mer enn $180°$, altså $\pi + \pi/6 = 7\pi/6$. En tredjedel av dette er $7\pi/18$.

Oppgave 14: Riktig svaralternativ er E

Begrunnelse: Vi vet ikke om $f(a)$ er lik den felles grenseverdien, faktisk vet vi ikke engang om a ligger i definisjonsområdet til f. Ergo er både A, B og C umulige. Alternativ D vet vi ingen ting om.

Oppgave 15: Riktig svaralternativ er D

Begrunnelse: Likningen $8x - x^2 - 16 = 0$ har én løsning, nemlig $x = 4$. Det følger at $8x - x^2 - 16 \leq 0$ for alle x. Ergo vil ikke ln til uttrykket $8x - x^2 - 16$ være definert for noen x.

Oppgave 16: Riktig svaralternativ er D

Begrunnelse: Tegn figur.

Oppgave 17: Riktig svaralternativ er B

Begrunnelse: Hvis vi lar $y(t)$ være høyden til øvre ende over bakken og $x(t)$ være posisjonen til nedre ende målt fra veggen ved tid t, får vi en rettvinklet trekant med kateter $y(t)$ og $x(t)$ og hypotenus 10. Pytagoras gir da

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100.$$

Derivasjon med hensyn på tiden t gir

$$2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0.$$

På tidspunktet vårt er $x'(t) = 1$ og $y(t) = 6$. Innsetting av $y(t) = 6$ i Pytagoraslikningen gir $x(t) = 8$. Innsetting av alt dette i likningen vi fant da vi deriverte, gir

$$2 \cdot 8 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot y'(t) = 0, \qquad \text{altså} \qquad y'(t) = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}.$$

Oppgave 18: Riktig svaralternativ er D

Begrunnelse: Vi får skråasymptoten $y = ax + b$ der

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1 \\
b &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} (xe^{-1/x} - x) \\
&\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to\infty} x(e^{-1/x} - 1) \\
&\overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{x^{-1}} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-1/x}(x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} (-e^{-1/x}) = -1.
\end{aligned}
$$

Oppgave 19: Riktig svaralternativ er B

Begrunnelse: La x være lengden av den siden som bare skal dekkes halvveis med gjerde, og la y være lengden av sidene vinkelrett på denne. Vi får da

$$\frac{x}{2} + 2y + x = 50, \qquad \text{altså} \qquad y = 25 - \frac{3}{4}x.$$

Innsetting av dette i uttrykket $A = xy$ for arealet av innhegningen gir

$$A(x) = x(25 - \frac{3}{4}x).$$

Dette er en annengradsfunksjon med nullpunkter $x = 0$ og $x = 100/3$. Siden fortegnet til koeffisienten foran x^2 er negativt, har den dermed et globalt maksimum midt mellom disse to nullpunktene, altså i $x = 100/6$. Innsetting av dette i $A(x)$ gir arealet $625/3$. [Alternativt kunne vi selvsagt derivere $A(x)$, sette den deriverte lik 0, osv.]

Oppgave 20: Riktig svaralternativ er D

Begrunnelse: Hverken A, B C eller E følger fra disse opplysningene. For å bevise D, kan vi argumentere slik: La p og r være de to nullpunktene for $f'(x)$, der $p < r$. Velg et punkt q slik at $p < q < r$. Da er $f'(q) \neq 0$. Anta først at $f'(q) > 0$. Ved middelverditeoremet brukt på funksjonen $f'(x)$ fins $x_0 \in (p, q)$ slik at

$$\frac{f'(q) - f'(p)}{q - p} = f''(x_0).$$

Siden $f'(p) = 0$, følger av dette at $f''(x_0) > 0$. Siden f'' er kontinuerlig, fins dermed et intervall I rundt x_0 der vi også har $f''(x) > 0$. På dette intervallet er f konveks. Hvis $f'(q) < 0$, bruker vi middelverditeoremet på intervallet $[q, r]$ i stedet og får samme konklusjon.