Eksempler til Ettertanke
MAT1100 – KALKULUS

Simon Foldvik

1. Oktober 2017

Dette dokumentet inneholder eksempler på hvor «ting går galt» og har til hensikt å vise eksempler på hva man *ikke* kan konkludere.[1] Alle referanser er til Tom Lindstrøms *Kalkulus*.[2]

1. Kontinuitet

Eksempel 1 (Grenseverdi kan ikke flyttes ut av funksjon)**.** Definér funksjonen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } x > 0 \\ 0, & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

og betrakt følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gitt ved $x_n = 1/n$ for $n \geq 1$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big).$$

Bevis. Vi har at $f(x_n) = f(1/n) = 1$ for alle n, slik at $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. På en annen side har vi at $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0) = 0$. ■

Sammenlign Eksempel 1 med Setning 5.1.10 på side 237. Hva går galt her?

Eksempel 2 (Diskontinuitet i alle punkter)**.** Definér funksjonen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty}\big(\cos(m!\pi x)\big)^{2n}\Big) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{hvis } x \notin \mathbf{Q} \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Da er f diskontinuerlig i alle punkter.

Bevis. La $x \in \mathbf{R}$. Vi skal vise at f er diskontinuerlig i x. La $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ være en følge av rasjonale tall som konvergerer mot x, og la $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ være en følge av irrasjonale tall som konvergerer mot x (hvorfor eksisterer det slike følger?). Da er $f(q_n) = 1$ og $f(\alpha_n) = 0$ for alle naturlige tall n, og dermed er

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n) = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0.$$

Det følger fra Setning 5.1.10 at f er diskontinuerlig i x. ■

[1] Det kan tenkes at dokumentet utvides i løpet av semesteret.

[2] Lindstrøm, Tom: *Kalkulus*, 4. utgave, Universitetsforlaget (2016).

Eksempel 3 (Kontinuitet i kun ett punkt)**.** La f være funksjonen fra Eksempel 2, og definér $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$g(x) = xf(x) = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{hvis } x \notin \mathbf{Q} \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Da er g kontinuerlig i punktet 0 og diskontinuerlig i alle andre punkter.

Bevis. Det kan vises på samme måte som i Eksempel 2 at g er diskontinuerlig på $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. For å vise at g er kontinuerlig i 0, observerer vi at

$$|g(x)| = |xf(x)| = |x||f(x)| \leq |x|,$$

det vil si

$$0 \leq |g(x)| \leq |x|,$$

for alle $x \in \mathbf{R}$, slik at $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ ved «skvising». ■

Eksempel 4 (Diskontinuerlige funksjoner med kontinuerlig sum)**.** Anta at $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en diskontinuerlig funksjon (for eksempel den fra Eksempel 2), og la $g = -f$. Da er g diskontinuerlig (hvorfor?), og

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + \bigl(-f(x)\bigr) = 0$$

for alle $x \in \mathbf{R}$, slik at $f+g$ er kontinuerlig.

Legg merke til hvordan $-f$ kansellerer diskontinuitetene til f under addisjon. Sammenlign med Setning 5.1.4 på side 234.

Eksempel 5 (Diskontinuerlige funksjoner med kontinuerlig produkt)**.** Anta at $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en diskontinuerlig funksjon som ikke tar verdien null (for eksempel en modifisert versjon av funksjonen fra Eksempel 2), og la $g = 1/f$. Da er g diskontinuerlig (hvorfor?), og

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(x)\frac{1}{f(x)} = 1$$

for alle $x \in \mathbf{R}$, slik at fg er kontinuerlig.

Legg merke til hvordan $1/f$ kansellerer diskontinuitetene til f under multiplikasjon. Sammenlign med Setning 5.1.4 på side 234.

Vi minner om at dersom X, Y og Z er mengder og $g\colon X \to Y$ og $f\colon Y \to Z$ er funksjoner, så er $f \circ g\colon X \to Z$ (*komposisjonen av f med g*; uttales «f ring g») funksjonen definert ved

$$(f \circ g)(x) = f\bigl(g(x)\bigr) \quad (x \in X).$$

Følgende diagram illustrerer situasjonen:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Eksempel 6 (Diskontinuerlige funksjoner med kontinuerlig komposisjon)**.** La $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være den diskontinuerlige funksjonen fra Eksempel 2. Da er $f(x) \in \mathbf{Q}$ for alle $x \in \mathbf{R}$, slik at

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Vi har dermed en kontinuerlig komposisjon $f \circ f$ av diskontinuerlige funksjoner. Sammenlign dette med Setning 5.1.6 på side 235.

Følgende eksempel viser at skjæringssetningen ikke holder over de rasjonale tallene.

Eksempel 7. La $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ være funksjonen definert ved

$$f(q) = q^2 - 2 \quad (q \in \mathbf{Q}).$$

Da er f kontinuerlig og tilfredsstiller $f(0) = -2 < 0$ og $f(2) = 2 > 0$, selv om det ikke finnes noe punkt $q \in \mathbf{Q}$ slik at $0 \leq q \leq 2$ og $f(q) = 0$ (et slikt punkt q måtte nødvendigvis ha tilfredsstilt $q^2 = 2$).

Det som går galt her er at $\mathbf{Q}$ ikke er *komplett* (se kompletthetsprinsippet på side 102). Dersom man studerer beviset for skjæringssetningen på side 244, vil man oppdage at nullpunktet som skjæringssetningen garanterer er gitt ved en minste øvre skranke, hvilket ikke nødvendigvis eksisterer blant de rasjonale tallene.

Se ytterlige kommentarer om dette eksempelet nederst på side 246.

De tre neste eksemplene bør ses i lys av ekstremalverdisetningen på side 251, som sier at en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset intervall er begrenset og oppnår et absolutt maksimum og et absolutt minimum.

Eksempel 8 (Ubegrenset kontinuerlig funksjon på et begrenset intervall)**.** Definér funksjonen $f\colon (0,1) \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0,1)).$$

Da er f en kontinuerlig funksjon definert på et begrenset intervall, men

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty,$$

slik at f ikke er begrenset. Det er heller ikke slik at f oppnår noe maksimum eller minimum. Hva går galt her?

Eksempel 9 (Begrenset kontinuerlig funksjon uten ekstremalpunkter)**.** Definér funksjonen $f\colon (0,1) \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = x \quad (x \in (0,1)).$$

Da er f en begrenset og kontinuerlig funksjon definert på et begrenset intervall, men f oppnår hverken et maksimum eller et minimum.

Eksempel 10 (Voksende funksjon uten maksimum på et lukket intervall)**.** Definér funksjonen $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = 1 - e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Da er f strengt voksende, kontinuerlig og begrenset. Videre oppnår f et absolutt minimum i punktet 0, og

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) = 1,$$

men f oppnår ikke noe absolutt maksimum.

Det som går galt her er at intervallet hvorpå f er definert er ubegrenset. Vi ser at funksjonen f vokser mot en horisontal asymptote uten å nå den.

2. Deriverbarhet

Eksempel 11 (Kontinuitet medfører ikke deriverbarhet)**.** Setning 6.1.9 på side 286 viser at deriverbarhet medfører kontinuitet, men det motsatte er ikke tilfellet. For definér funksjonen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = |x| \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Da er f kontinuerlig i 0, men

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1,$$

slik at f ikke er deriverbar i 0.

Eksempel 12 (Deriverbar funksjon med derivert diskontinuerlig i et punkt)**.** Definér funksjonen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Da er f deriverbar på $\mathbf{R}$, men f' er ikke kontinuerlig i punktet 0.

Bevis. At f er deriverbar i punktet 0 følger fra

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\Big(\frac{1}{h^2}\Big) = 0,$$

som igjen følger fra ulikheten

$$\Big| h \sin\Big(\frac{1}{h^2}\Big) \Big| \leq |h| \quad (h \neq 0).$$

Man ser lett at f også er deriverbar på $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, og at man alt i alt har følgende:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2), & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Betrakt følgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gitt ved

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \quad (n \geq 1).$$

Den tilfredsstiller $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Videre, for alle n er $x_n > 0$, og en kort utregning viser at $f'(x_n) = -2\sqrt{2\pi n}$. Dette betyr at

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -\infty,$$

hvilket i følge Setning 5.1.10 på side 237 betyr at f' er diskontinuerlig i punktet 0 (dersom f' var kontinuerlig i 0, måtte $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(0) = 0$, ettersom $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$). ■

Følgende eksempel viser en deriverbar funksjon som ikke oppfyller konklusjonen i middelverdisetningen.

Eksempel 13. Definér funksjonen $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \in (0,1] \\ 1, & \text{hvis } x = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Da er f kontinuerlig og deriverbar på det åpne intervallet $(0,1)$. Videre er $f'(x) = 1$ for alle $x \in (0,1)$, slik at det ikke finnes noe punkt $c \in (0,1)$ slik at $f'(c)$ er lik

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0.$$

Hvorfor strider ikke dette mot middelverdisetningen?

Eksempel 14 (Nullderivert men ikke et ekstremalpunkt)**.** Definér funksjonen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Da er $f'(0) = 0$, men f er strengt voksende og har ikke noe ekstremalpunkt.

Sammenlign dette med Setning 6.2.1 på side 289.