

**GRUBLEGRUPPE MAT1100**  
**OPPGAVESETT 2**

SIMON FOLDVIK  
7. SEPTEMBER 2017

I dette settet refererer ordet «følge» til en følge av reelle tall. Ordet «punkt» vil brukes om et reelt tall.

**Oppgave 1.** Finnes det en følge som konvergerer mot mer enn ett punkt?

*Hint.* Anta at  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  er en følge som konvergerer mot både  $u$  og  $v$ . Vis at da må ulikheten  $|u - v| < \epsilon$  holde for alle  $\epsilon > 0$ .

**Oppgave 2.** Anta at  $(u_n)_{n=0}^{\infty}$  og  $(v_n)_{n=0}^{\infty}$  er to konvergente følger som er slik at ulikheten  $u_n \leq v_n$  holder for alle naturlige tall  $n$ . Vis at da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n. \quad (1)$$

Gi et eksempel på slike følger hvor likhet holder i (1), selv om  $u_n < v_n$  for alle  $n$ .

*Hint.* Motsigelsesbevis.

**Oppgave 3.** La  $A$  være en ikke-tom, oppad begrenset delmengde av  $\mathbf{R}$ . Vis at det for alle  $\epsilon > 0$  finnes et punkt  $a \in A$  slik at

$$\sup A - \epsilon < a.$$

**Oppgave 4.** La  $A$  være en ikke-tom, oppad begrenset delmengde av  $\mathbf{R}$ . Vis at det finnes en konvergent følge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  av punkter i  $A$  slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A.$$

Vis at det finnes en konvergent følge  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  som *ikke* ligger i  $A$  slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup A.$$

*Hint.* Bruk Oppgave 3 gjentatte ganger med  $\epsilon = 1/n$  for naturlige tall  $n \geq 1$ .

**Oppgave 5.** Anta at  $A$  er en ikke-tom delmengde av  $\mathbf{R}$ . Vis at  $A$  *ikke* er oppad begrenset hvis og bare hvis det finnes en følge  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  i  $A$  slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$