4.3.17 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$ $\quad a_0 = 0$

Skal vise at den $\{a_n\}$ er konvergent!

Må vise ① begrenset og ② monoton

① Anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

$a_{n+1} = A = a_n$ fra n stor nok.

$$A = \frac{A}{2} + 1 \quad |\cdot 2$$

$$2A = A + 2 \quad |-A$$

$$A = 2$$

Dette vil den konvergere mot – hvis den konvergerer

② INDUKSJONS

I $a_0 = 0$

$$a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = \frac{0}{2} + 1$$

$$a_1 = 1$$

Viser at følgen er monoton ved INDUKSJON

II Anta $a_k > a_{k-1}$ INDUKSJONSHYPOTESE

III $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 > \frac{a_{k-1}}{2} + 1 = a_k$ INDUKSJONSSTEGET.

Følgen er monoton ved induksjon.

v/ TEOREM er følgen konvergent; den er monotont voksende og oppad begrenset.

5.1.5 c) Skal vise $f(x) = 2x^2 + 3$ er kontinuerlig i $\underline{1}$.

Gitt $\varepsilon > 0$. $h = x - a$

$$|f(x) - f(1)| = |2x^2 + 3 - (2 \cdot 1^2 + 3)|$$
$$= |2x^2 + 3 - 5|$$
$$= |2x^2 - 2|$$
$$= 2|x^2 - 1|$$

Innfører $h = x - 1$, $x = h + 1$

$$= 2|(h+1)^2 - 1|$$
$$= 2|h^2 + 2h + 1 - 1|$$
$$= 2|h(h+2)|$$
$$= 2|h+2| \cdot |h| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- Velg $\delta_1 = 1$, for $|h| < \delta_1$ så er $|h+2| < 3$
  $$< 2 \cdot 3 \cdot |h| = 6|h|$$
- Velg $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{6}$, for $|h| < \frac{\varepsilon}{6}$
  $$< 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

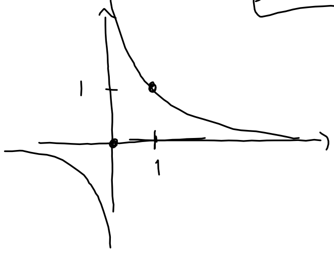
$\delta_1 = 2$ $|h+2| < 4$
$< 2 \cdot 4 \cdot |h|$
$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{8}$

- Velg $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$.

For $x \in D_f$ og $|x - 1| < \delta$ så er/har vi vist at $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

Altså er $f(x)$ kontinuerlig i 1.

$\boxed{5.1.5.\ e)}$ Skal vise at $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig i $\underline{1}$. $\boxed{\begin{matrix}2\\ h = x-2\end{matrix}}$



Gitt $\varepsilon > 0$.

$$\to |f(x) - f(1)| = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$$

Innføre $h = x - 1$, $x = h + 1$

$$= \left|\frac{1}{h+1} - 1\right|$$

$$= \left|\frac{1-(h+1)}{h+1}\right|$$

$$= \left|\frac{-h}{h+1}\right|$$

Se bort fra denne oppgaven!!!!!....

$$= \frac{|h|}{|h+1|} = |h| \cdot \frac{1}{|h+1|} \qquad |h| = |x-1|$$

begrense denne først

• Velg $\delta_1 = 3$ for $|h| < \delta_1$ så vil $4 > |h+1| > 2$ $\qquad |h| \leq 3$, $h = -3$, $h = 3$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{|h+1|} < \frac{1}{2}$$

denne er for stor!!

$$\frac{|h|}{|h+1|} < \frac{|h|}{2}$$

• Velg $\delta_2 = 2\varepsilon$ for $|h| < \delta_2$

$$\frac{|h|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

• Velg $\delta = \min\{2\varepsilon, 3\}$, da er for enhver $\varepsilon > 0$ og $x \in D_f$, $|x-1| < \delta$ $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, og f er kontinuerlig i 1.

• Velg $\delta_1 < \frac{1}{2}$, for $|h| < \delta_1$ er $\frac{3}{2} > |h+1| > \frac{1}{2}$ $\qquad h = -\frac{1}{2}$ gir $\frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$ gir $\frac{3}{2}$

$$\frac{|h|}{|h+1|} < 2|h|$$

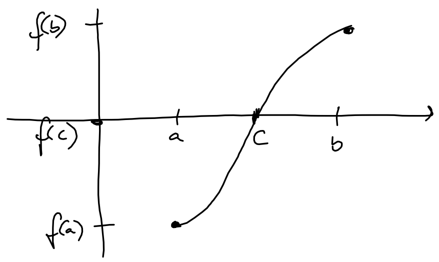
• Velg $\delta_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$, for $|h| < \delta_2$ er

$$2|h| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

• Velg $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. så holder det.

SKJÆRINGSSETNINGEN

5.2.1. Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en <u>kontinuerlig</u> funksjon der $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn.
Da finnes det et tall $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$

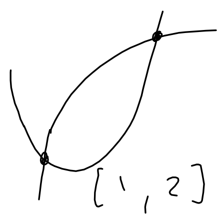


5.2.1 c) Skal vise at $f(x) = 2x - 3 - \ln x$ har et nullpunkt på $[1, e]$

- $f(x)$ er kontinuerlig på $[1,e]$ fordi det er en differanse av tre kontinuerlige funksjoner som er definert på $[1,e]$
- $f(1) = 2\cdot 1 - 3 - \ln 1$
  $\underline{= -1} < 0$
- $f(e) = 2\cdot e - 3 - \ln e$
  $= \underline{2e - 4} > 0$

v/ skjæringssetningen finnes $c \in (1,e)$ s.a. $f(c) = 0$.

5.2.3. a) Skal vise at grafene til $f(x) = \ln x$
og $g(x) = x^2 - 2$
skjærer hverandre på intervallet [1, 2]



Se på $h(x) = g(x) - f(x)$
$= x^2 - 2 - \ln x$

- $h(x)$ er kontinuerlig
- $h(1) = 1^2 - 2 - \ln 1 = -1 < 0$
- $h(2) = 2^2 - 2 - \ln 2 = 2 - \ln 2 > 0$

V/ Skjæringssetn finnes $c \in (1,2)$ s.a. $h(c) = 0 = g(c) - f(c)$
$g(c) = f(c)$

Så grafene skjærer hverandre for $x = c$.

$\ln x = x^2 - 2$

$e^{\ln x} = e^{x^2 - 2}$

$x = \ldots$ ikke gøy!!