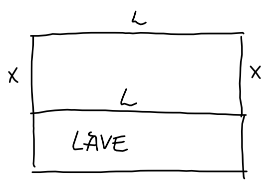
7.1. Max-min -problemer

- Har et uttrykk (Volum, Areal ...)
- Har en variabel
- Derivere uttrykket og sette dette lik 0.

7.1.1.



50m gjerde

$O(x,L) = O(x) = x + x + L = \underline{2x + L = 50}$ $\qquad L = 50 - 2x$

$A(x,L) = A(x) = x \cdot L$

$= x(50 - 2x)$

$= \underline{50x - 2x^2}$

$A'(x) = 50 - 4x = 0$

$50 = 4x$

$\underline{x = \frac{25}{2}}$

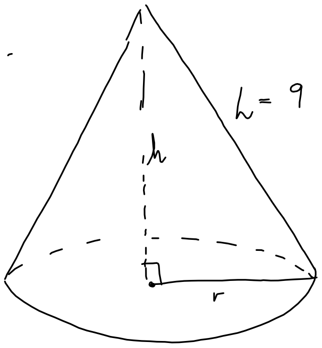
$A\left(\frac{25}{2}\right) = \frac{25}{2}\left(50 - 2 \cdot \frac{25}{2}\right)$

$= \underline{\underline{\frac{625}{2}}} \ (m^2)$

Argumentere for maksverdi:
Se på $A''(x) = -4 < 0$

Funksjonen er konkav, så vi har maksimumsverdi.

7.1.5.



$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$h = \sqrt{81 - r^2}$$

$$V(h, r) = V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{81 - r^2}$$

$$r = \sqrt{81 - h^2}$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{81 - h^2}\right)^2 \cdot h$$

$$= \frac{\pi}{3}(81 - h^2) \cdot h$$

$$= 27\pi h - \frac{\pi}{3} \cdot h^3$$

$$V'(h) = 27\pi - \pi \cdot h^2 = 0$$

$$27\cancel{\pi} = \cancel{\pi} h^2$$

$$h = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

$$h = 3\sqrt{3}$$ siden vi jobber med lengder (>0)

$$V(3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{\cancel{3}}\left(81 - (3\sqrt{3})^2\right) \cdot \cancel{3}\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \pi (81 - 3^3)$$

$$= \sqrt{3}\pi (3^4 - 3^3)$$

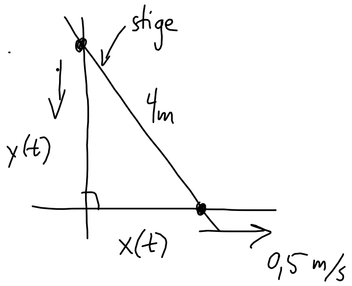
$$= 3^3 \sqrt{3} \pi (3 - 1)$$

$$= 3^3 \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2 = 54\pi\sqrt{3}$$

7.2. KOBLEDE HASTIGHETER

- Problemer (ofte fysiske) der to hastigheter er knyttet sammen.
- Geometrisk sammenheng
- Variabel er tid
- Derivere geometrisk sammenheng mht tid.

7.2.1.



Hvor fort beveger toppen av stigen seg når den er 2m over bakken?

$x(t)$ $\quad x'(t) = 0{,}5$ m/s

$y(t)$

Skal finne $y'(t_0)$ når $y(t_0) = 2$ m

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 16$$

Deriver: (Kjerneregel)

$$2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$

$$y'(t) = \frac{-x(t)x'(t)}{y(t)}$$

$$y'(t_0) = \frac{-x(t_0)x'(t_0)}{y(t_0)} = \frac{-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ (\text{m/s})$$

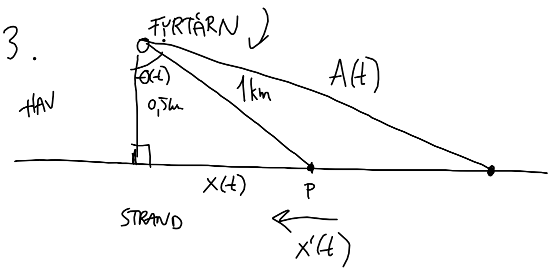
$x'(t_0) = 0{,}5$

$y(t_0) = 2$

$x(t_0) = \sqrt{16-2^2}$

$= 2\sqrt{3}$

7.2.3.



Roterer: 2 omdr/min

Vinkel: $\theta(t)$

$\theta'(t) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ (radianer/min)

Skal finne $x'(t)$ når et punkt 1 km fra fyrtårnet.

↑ spesielt punkt

• $\tan \theta(t) = \frac{x(t)}{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} \tan \theta(t)}$$

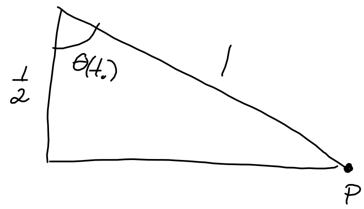
• Deriverer:

$$x'(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t)$$

$$= \frac{\theta'(t)}{2\cos^2 \theta(t)}$$

$$x'(t_0) = \frac{4\pi}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 8\pi \ (\text{km/min})$$



$\theta'(t_0) = 4\pi$

$\cos \theta(t_0) = \frac{1}{2}$

7.5. COTANGENS :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$D[\cot x] = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$

7.5.1. a) $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

7.5.2. a) $D[\cot(x^2)] = -\frac{1}{\sin^2(x^2)} \cdot 2x = \frac{-2x}{\sin^2(x^2)}$

$$D\left[\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\right] = \frac{-\sin(x^2)\cdot 2x \cdot \sin(x^2) - \cos(x^2)\cdot 2x \cdot \cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$$

$$= \frac{-2x\,(\underbrace{\sin^2(x^2) + \cos^2(x^2)}_{=1})}{\sin^2(x^2)}$$

$$= \frac{-2x}{\sin^2(x^2)}$$

7.5.2. d) $D[e^x \cot(\ln x)] = e^x \cot(\ln x) + e^x\left(-\frac{1}{\sin^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x}\right)$

$$= e^x\left(\cot(\ln x) - \frac{1}{x\sin^2(\ln x)}\right)$$

7.4. OMVENDTE FUNKSJONER

$$\underbrace{f \circ g}_{\circ} (x) = x$$

$f(x)$ $g(y)$

$f(g(y)) = y$ $g(f(x)) = x$

e^x $\ln y$

$e^{\ln y} = y$ $\ln e^x = x \ln e = x$

VIKTIG: En funksjon kan ikke ha en omvendt funksjon hvis den ikke er INJEKTIV

INJEKTIV: $f: D_f \to \mathbb{R}$ kalles INJEKTIV dersom det til hver $y \in V_f$ finnes nøyaktig en $x \in D_f$ s.a. $f(x) = y$.

(EN-ENTYDIG)

MÅTER Å SJEKKE:

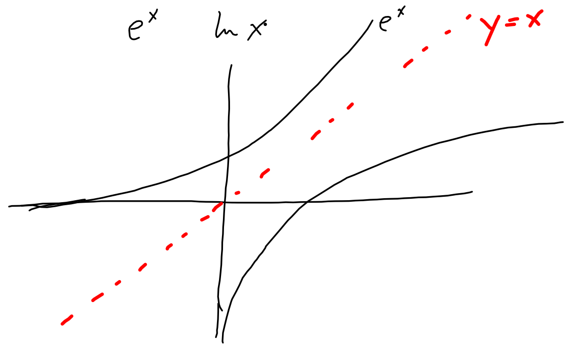
- strengt avtagende eller strengt voksende (derivasjon)
- Hvis $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ er f injektiv

EGENSKAPER:

$D_f = V_g$

$V_f = D_g$

Grafene er speilinger om linja $y = x$.



(1) TEOREM 7.4.5. Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og strengt voksende

Så er $g = f^{-1}$ — " —

Med $D_g = V_f = [f(a), f(b)]$

Tilsvarende for strengt avtagende funksjoner

(2) TEOREM 7.4.6. (Finne den deriverte til inversfunksjoner)

Anta f kontinuerlig, strengt monoton funksjon

deriverbar i x med $f'(x) \neq 0$

Da er $g = f^{-1}$ deriverbar i $y = f(x)$

og $\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$ ← Spesielt nyttig når man ikke klarer å finne inversfunksjonen!

7.4.3. $f(x) = 2xe^x + 1$ $\quad x \geq -1$ $\quad g = f^{-1}$

Kontinuerlig fordi den er satt sammen av kontinuerlige $\quad g'(1) = ?$

$f'(x) = 2e^x + 2x \cdot e^x \quad \begin{cases} = 0 & \text{for } x = -1 \\ > 0 & \text{for } x > -1 \end{cases}$

Den er strengt voksende på $[-1, \infty)$.

$g(y)$ fins og er strengt voksende.

$g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$

$1 = y = f(x)$

$1 = 2xe^x + 1$

$x = 0$

$f'(0) = 2e^0 + 2 \cdot 0 e^0 = 2$

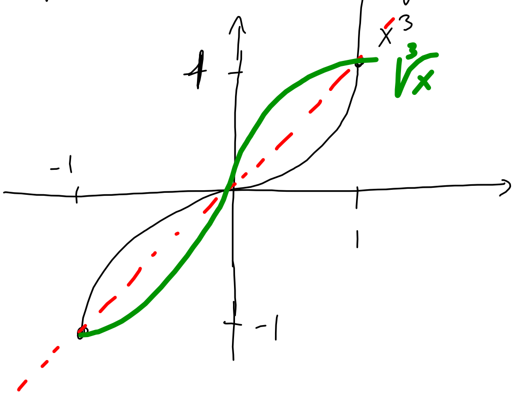
7.4.1. a) $f(x) = x^3$ $D_f = \mathbb{R}$

Sjekker injektiv: $f'(x) = 3x^2 \begin{cases} > 0 & \text{for } x \neq 0 \\ = 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ strengt voksende funksjon

$y = x^3$

$x = \sqrt[3]{y}$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$ er omvendt funksjon til $f(x) = x^3$



7.4.7. $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$

Er injektiv $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

v/teorem 7.4.6.

$$g'(\underbrace{\tan x}) = \frac{1}{(\tan x)'}$$

$g(y) = g(\tan x)$

$\underbrace{y} = f(x) = \underbrace{\tan(x)}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\underline{g'(y) = \frac{1}{1 + y^2}}$$

$g(y) = \arctan y$

7.6. ARCUSFUNKSJONENE

- $\sin x$ $\arcsin x$
  $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

  $\arcsin(\sin x) = x$
- $\cos x$ $\arccos x$
- $\tan x$ $\arctan x$
- $\cot x$ $\operatorname{arccot} x$

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D[\operatorname{arccot} x] = \frac{-1}{1+x^2}$$