Løsningsforslag utsatt eksamen Mat 1100 22.01.2019

Oppgave 1

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (8 - 0) + 4 \cdot (16 - 0)$$

$$= 0 - 16 + 64 = \underline{\underline{48}}$$

Så volumet er $\frac{1}{6} \cdot 48 = \underline{\underline{8}}$

b)

$$f(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & x & x^2 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 8 & x^2 \end{matrix} \right\| = \left| 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & x^2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{vmatrix} + x^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| 1 \cdot 0 - x \cdot x^3 + x^2 \cdot 8x \right|$$

$$= \left| 8x^3 - x^4 \right| = \left| x^3 (8 - x) \right|$$

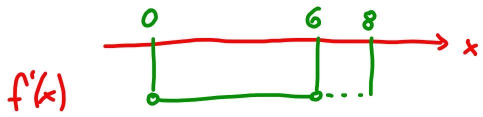
$$= x^3 (8 - x) \quad \text{for } x \in [0, 8].$$

Siden f er en polynomfunksjon, er den kontinuerlig. Siden $[0, 8]$ er et lukket intervall, har derfor f et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt ved ekstremalverdisetningen.

(Oppgave 1 forts.)

c) Vi har $f(x) = 8x^3 - x^4$

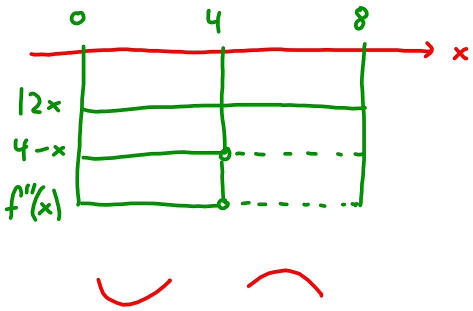
Så $f'(x) = 24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x)$



$f(0) = f(8) = 0$

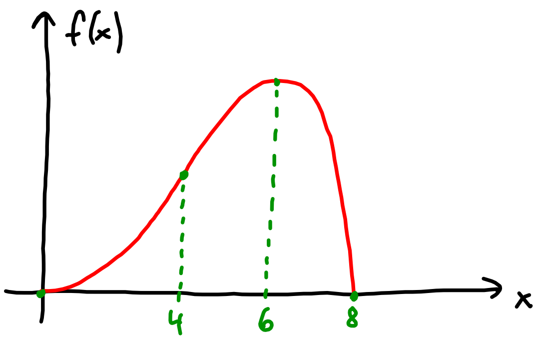
Av dette følger at $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 8}}$ er globale minimumspunkter for f, mens $\underline{\underline{x = 6}}$ er et globalt maksimumspunkt.

d) $f''(x) = 48x - 12x^2 = 12x(4-x)$



Det følger av dette at f er konkav på $\underline{\underline{[4, 8]}}$ og konveks på $\underline{\underline{[0, 4]}}$. Vendepunkt: $\underline{\underline{x = 4}}$

Skisse:



Oppgave 2

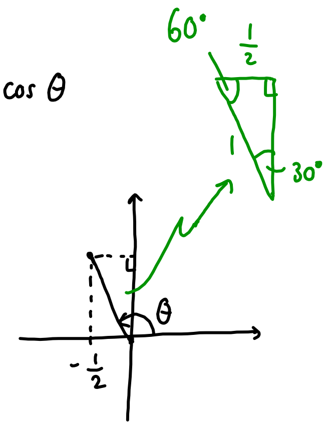
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$ gir

$$\left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right) \cdot (1,1,0,0) = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\theta$$

dvs.

$$-\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$



Vi vet at $\theta \in [0, \pi]$, og dermed får vi (se figur)

$$\theta = 90^\circ + 30^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Så vinkelen mellom de to vektorene er $\underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$

Oppgave 3

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{for } x \leq 0 \\ \arctan 2x & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

a) $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan(2x) = 0$$

Så vi må ha $f(0) = 0 = a \cdot 0 + b$. Altså $\underline{\underline{b = 0}}$

b) $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\arctan 2h - 0}{h} \quad (\text{når } b = 0)$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+(2h)^2} \cdot 2}{1} = 2$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{ah + 0 - 0}{h} = a$$

Det følger at $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 2$ hvis $a = 2$

Så $f'(0) = 2$ hvis $a = 2$ og $b = 0$. For $x \neq 0$ er $f(x)$ gitt ved deriverbare funksjoner, så med $\underline{\underline{a = 2 \text{ og } b = 0}}$ blir f deriverbar.

Oppgave 4

a) $$\int \ln(3x)\,dx = x\cdot\ln(3x) - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Delvis} & F(x)=\ln(3x) & G'(x)=1 \\ & F'(x)=\frac{1}{3x}\cdot 3 & G(x)=x \end{array}}$$

$$= x\ln(3x) - x + C$$

Så $$\int_1^2 \ln 3x\,dx = \Big[x\ln 3x - x\Big]_1^2$$

$$= \big[2\ln 6 - 2\big] - \big[1\ln 3 - 1\big]$$

$$= 2\ln 6 - 2 - \ln 3 + 1$$

$$= 2\ln(3\cdot 2) - \ln 3 - 1$$

$$= 2(\ln 3 + \ln 2) - \ln 3 - 1$$

$$= \underline{\underline{\ln 3 + 2\ln 2 - 1}}$$

b) $$\int(\tan^2 x + 1)\,dx = \int\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \underline{\underline{\tan x + C}}$$

Oppgave 5

a) $$V(p,K) = \int_1^K \pi \cdot [f_p(x)]^2 \, dx = \int_1^K \pi \cdot \left(\frac{1}{x^p}\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_1^K x^{-2p} \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{-2p+1} x^{-2p+1}\right]_1^K$$

$$= \frac{\pi}{-2p+1}\left[K^{-2p+1} - 1^{-2p+1}\right] = \frac{\pi}{1-2p}\left(1 - \frac{1}{K^{2p-1}}\right)$$

b) $$\lim_{K\to\infty} V(p,K) = \lim_{K\to\infty} \frac{\pi}{2p-1}\left(1 - \frac{1}{K^{2p-1}}\right)$$

$+\infty$ fordi $p > 1$

$$= \frac{\pi}{2p-1}$$

På den annen side har vi

$$\int_1^\infty f_p(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{-p+1} \lim_{b\to\infty}\left[b^{-p+1} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{p-1} \lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{1}{b^{p-1}}\right]$$

$+\infty$ fordi $p > 1$

$$= \frac{1}{p-1}$$

(Oppgave 5 forts.)

Vi må altså ha

$$\frac{\pi}{2p-1} = \frac{1}{p-1}$$

$$\pi(p-1) = 2p-1$$

$$\pi p - \pi = 2p-1$$

$$\pi p - 2p = \pi - 1, \quad \text{dvs.} \quad \underline{\underline{p = \frac{\pi-1}{\pi-2}}}$$

Oppgave 6

La $F(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ for $x \in [a,b]$.

Da er $F(a) = F(b) = 0$, og

$$F'(x) = g'(x) \quad \text{for } x \in (a,b)$$

ved fundamentalteoremet. Siden F også er kontinuerlig på $[a,b]$ ved fundamentalteoremet, følger ved Rolles teorem at det fins $x \in (a,b)$ slik at

$$F'(x) = g(x) = 0.$$