Matriser

Matrise A: En rektangulær tabell med tall (reelle eller komplekse):

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$m \times n$-matrise
m rader
n kolonner

Addisjon: A og B begge $m \times n$-matriser

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \rightsquigarrow A + B = (c_{ij})$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Skalarmultiplikasjon. A $m \times n$-matrise, tall c.

$$cA = (ca_{ij})$$

0-matrise: $0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $m \times n$-matrise.

$$A + 0_{m \times n} = A = 0_{m \times n} + A$$

Matrisemultiplikasjon

A $m \times n$-matrise, B $n \times p$-matrise

$\rightsquigarrow$ AB definert, $m \times p$-matrise.

$$(m \times \cancel{n}) \cdot (\cancel{n} \times p) = m \times p$$

$AB = (c_{ij})$ $\quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & & \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} & \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Viktig! $AB \neq BA$ matrisemultiplikasjon er ikke kommutativt!

BA definert $\rightsquigarrow$ B $n \times m$ -matrise

Eksempel 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3×4 $\qquad$ 4×2

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 5 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Eksempel 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}.$$

[Det fins nulldivisorer. $A \neq 0_2$ og $B \neq 0_2$ men likevel $AB = 0_2$]

Identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad n \times n\text{-matrise.}$$

A $m \times n$ -matrise, B $n \times p$-matrise

$$A I_n = A \qquad I_n B = B$$

$(m \times \cancel{n})\ (\cancel{n} \times n)$ $\qquad$ $(n \times \cancel{n})\ (\cancel{n} \times p)$

$m \times n$ $\qquad$ $n \times p$

$$A\, 0_{n\times n} = 0_{m \times n}$$

$$0_{n \times n} B = 0_{n \times p}$$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow [v_1 \cdots v_n]$ $\qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$\shortparallel$

$(v_1, \ldots, v_n)$

radvektor $\qquad$ kolonnevektor

$1 \times n$ -matrise $\qquad$ $n \times 1$-matrise

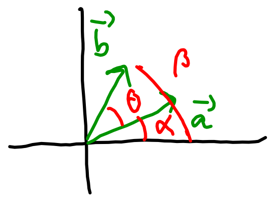
A $m\times n$-matrise, $\vec{v}$ $n \times 1$-matrise $\rightsquigarrow$ $A\vec{v}$ $m \times 1$ -matrise

A $m \times n$-matrise

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$T_A(\vec{v}) = A\vec{v}$$

Eksempel 3 Vi er gitt $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Vi roterer $\vec{a}$ med vinkelen $\theta \in \mathbb{R}$ og får $\vec{b}$. Hvordan ser $\vec{b}$ ut?



$$\vec{a} = (x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$

$$r = |\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

α vinkel mellom x-aksen og $\vec{a}$.

$$|\vec{b}| = |\vec{a}| = r$$

β = vinkelen mellom x-aksen og $\vec{b}$ $= \alpha + \theta$

$$\vec{b} = (r\cos(\alpha+\theta), r\sin(\alpha+\theta))$$

$$= r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta, \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$$

Trigonometri:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Definer

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Observer

$$\begin{array}{c} \\ A_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \end{array} \begin{array}{c} \cos\alpha \qquad\qquad \sin\alpha \\ \begin{bmatrix} (\cos\theta)\overset{''}{x} - (\sin\theta)\overset{''}{y} \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\vec{b} = rA_\theta \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = A_\theta \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} = A_\theta \vec{a}.$$

$$T_{A_\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_{A_\theta}\vec{a} = A_\theta \vec{a} \quad \text{rotasjon med vinkel } \theta.$$

....

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{roter med } \theta} \vec{b} \xrightarrow{\text{roter med } \phi} \vec{c}$$

roter med $\phi + \theta$

$$\vec{b} = A_\theta \vec{a}, \quad \vec{c} = A_\phi \vec{b} \quad \leadsto \quad \vec{c} = A_\phi(A_\theta \vec{a})$$

$$\vec{c} = A_{\phi+\theta}\vec{a} \quad \leadsto \quad A_{\phi+\theta} = A_\phi A_\theta$$

Burde ha : $A_{\phi+\theta} = A_\phi A_\theta$.

$$A_\phi A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & \cos\phi(-\sin\theta) + (-\sin\phi)\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Inverser til matriser

$x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \rightsquigarrow y = \frac{1}{x}.\quad xy = 1$

Hvis A er en $n\times n$-matrise, når fins en $n\times n$-matrise B slik at $AB = I_n = BA$?

Hvis B fins, kalles B inversen til A ; $B = A^{-1}$ (unik)

A er inverterbar hvis den har en invers, ellers er den singulær.

Eksempel 4 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Anta at A^{-1} fins. $\Longrightarrow$ $A^{-1}(AB) = A^{-1}0_{2\times2}$

$(A^{-1}A)B = 0_{2\times2}$

$I_2 B = 0_{2\times2}$

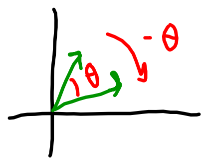
$B = 0_{2\times2}$ Selvmotsigelse

A er singulær.

Merk: Ikke-null matriser kan være singulære.

Eksempel 5 $\quad A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$.

$A_\theta A_{-\theta} = A_{\theta+(-\theta)} = A_0 = I_2 \rightsquigarrow A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$



Eksempel 6. La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. a) Vis at A er inverterbar hvis og bare hvis $ad-bc \neq 0$, og at inversen i så fall er gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Først: Hvis $ad-bc \neq 0$, så er

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Dermed er A invertibel, og formelen for A^{-1} stemmer.

Anta at A er inverterbar. Så vil

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Hvis $ad-bc=0$, så har vi $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$ umulig.

Dermed er $ad-bc \neq 0$.

b) Regn ut inversen til $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{2\cdot 3-(-5)(-1)}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Determinanter

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad n\times n\text{-matrise.}$$

Determinanten til A:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

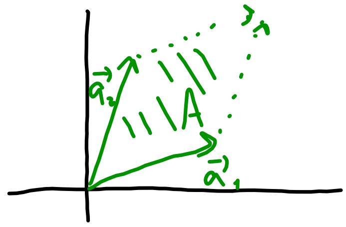
2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

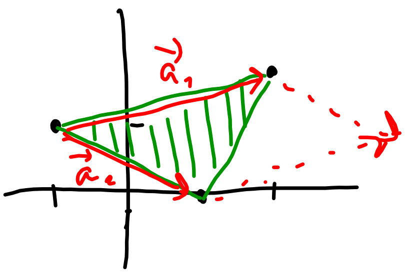
Matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ er invertibel hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$. Dette holder generelt for $n\times n$-matriser.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$|A|$ = areal til parallellogram med fortegn.



Eksempel 7 Finn arealet til trekanten bestemt av punktene $(1,0)$, $(2,2)$ og $(-1,1)$.



$$\vec{a}_1 = (2,2)-(-1,1) = (3,1)$$
$$\vec{a}_2 = (1,0)-(-1,1) = (2,-1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = 3(-1) - 2\cdot 1 = -5$$

Areal til trekant: $\left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$.