Ulrik Enstad
ubenstad@math.uio.no

5.1 Kontinuitet

Notasjon:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

f er en funksjon fra A til $\mathbb{R}$.
Her er A en delmengde av $\mathbb{R}$, dvs. $A \subseteq \mathbb{R}$.

For hver $x \in A$ så får vi en $f(x) \in \mathbb{R}$

D_f = definisjonsmengden til $f = A$

$V_f = \{f(x) : x \in D_f\}$ verdimengden til f.

Eksempel 1 La $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-3}$.

Inneforstått at $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \text{ og } x > 1\}$
$= (1,3) \cup (3,\infty)$.

Eksempel 2 La $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være gitt ved

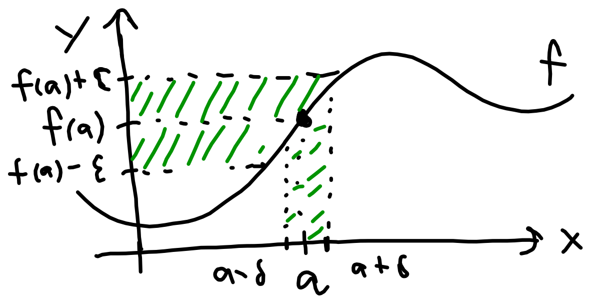
$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \text{ er rasjonalt} \\ -1 & ; \ x \text{ er irrasjonalt} \end{cases}$$

Kontinuitet, idé: $f: A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i punktet $a \in A$ dersom vi kan få (for alle $x \in A$)

$f(x)$ nærme $f(a)$ ⇝ $|f(x)-f(a)|$ liten

ved å velge x nærme a. ⇝ $|x-a|$ liten

DEFINISJON: En funksjon $f: A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i punktet $a \in A$ dersom følgende gjelder: For alle $\varepsilon > 0$, så eksisterer det en $\delta > 0$ slik at dersom $x \in A$ så har vi at $|x-a| < \delta$ implisere at $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.



Vi sier at f er kontinuerlig dersom f er kontinuerlig i alle punkter $a \in A$.

Eksempel 3. La $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = 2x - 1.$$

Vis at f er kontinuerlig i $a = 0$.

Mellomregning.

$$|f(x)-f(0)| = |2x - 1 - (2\cdot 0 - 1)|$$
$$= |2x - 1 + 1| = 2|x|.$$

$|x - 0| = |x|$. "Ser" at $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ fungerer. gitt en $\varepsilon > 0$

Bevis: La $\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Sett $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
Da ser vi at dersom $x \in \mathbb{R}$ tilfredsstiller
$|x - 0| = |x| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, så vil
$|f(x) - f(0)| = 2|x| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Dermed har vi vist at f er kontinuerlig i $a = 0$.

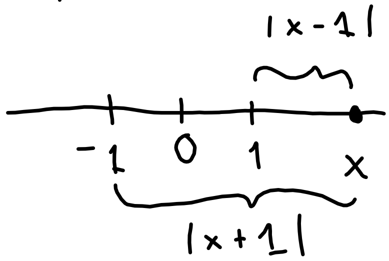
Eksempel 4: La $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$g(x) = x^2.$$

Vis at g er kontinuerlig i $a = 1$.

Mellomregning:

$$|g(x) - g(1)| = |x^2 - 1| = |(x-1)(x+1)|$$
$$= \underbrace{|x-1|}|x+1|$$



Ser fra tegningen at

$$|x+1| \leq |x-1| + 2.$$

ser at hvis $|x-1| < 1$, så vil
$|x+1| \leq 1 + 2 = 3$.
"Ser" at vi kan velge $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$.

Bevis: La $\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Sett $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$.
Hvis nå $x \in \mathbb{R}$ slik at $|x - 1| < \delta$, så må <u>både</u>
$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$ og $|x-1| < 1$. Sistnevnte impliserer at
$|x+1| < 3$. Derfor får vi at

$$|g(x) - g(1)| = |x-1||x+1| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon.$$

Ergo er g kontinuerlig i $a = 1$.

5.1.4 Setning: Hvis f og g er kontinuerlige i punktet a, så er $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, og f/g også kontinuerlige i a (sistnevnte forutsetter at $g(a) \neq 0$).

5.1.6 Setning: Hvis g er kontinuerlig i a og f er kontinuerlig i $g(a)$, da er $h = f \circ g$ $(h(x) = f(g(x)))$ kontinuerlig i a.

Eksempel 5: Vis at funksjonen
$$h(x) = e^{x^2} - x \cdot \sin(x) + 2$$
er kontinuerlig.

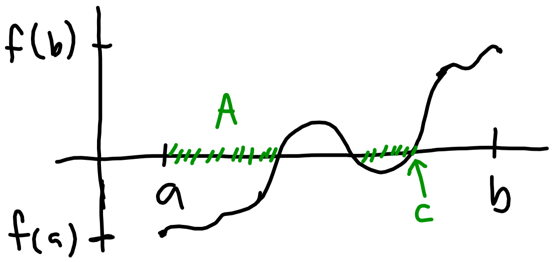
Definer $h_1(x) = e^x$, $h_2(x) = x^2$. Da er $h_1(h_2(x)) = e^{x^2}$.
Siden h_1 og h_2 er kontinuerlige, må $h_1(h_2(x))$ også være det ved 5.1.6. x og $\sin(x)$ er begge kontinuerlige, dermed er $x \cdot \sin(x)$ kontinuerlig ved setning 5.1.4.
Ved setning 5.1.4 igjen får vi at $h(x) = e^{x^2} - x\sin(x) + 2$ er kontinuerlig.

5.1.10 Setning. En funksjon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig i punktet $a \in A$ hvis og bare hvis følgende gjelder:
For enhver følge $\{x_n\}$ av punkter i A som konvergerer mot a, så vil følgen $\{f(x_n)\}$ konvergere mot $f(a)$, dvs.
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Eksempel 6. Regn ut $\lim_{n \to \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
Siden $\cos(x)$ er kontinuerlig i $a = 0$ og følgen $x_n = \frac{1}{n}$ konvergerer mot 0, så må (ved 5.1.10)
$$\lim_{n \to \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1.$$

5.2 Skjæringssetningen

5.2.1 Skjæringssetningen. La f være en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$. Anta at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn. Da fins det et $c \in (a,b)$ slik at $f(c)=0$.



Bevis: Definer $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$.
A er begrenset ovenifra, fordi b er en øvre skranke.
A er ikke-tom, siden $a \in A$.
Ved kompletthetsprinsippet (2.3.2) har A en minste øvre skranke. Sett $c = \sup A$. Vårt mål: Vise at $f(c)=0$.

For å få en selvmotsigelse, anta at $f(c)>0$. Siden f er kontinuerlig i c, så fins det tilsvarende til $\varepsilon = f(c)/2$, en $\delta>0$, slik at for $x \in [a,b]$ så vil $|x-c|<\delta$ implisere at $|f(x)-f(c)|<f(c)/2$. Hvis nå $x \in A$ og $|x-c|<\delta$ så vil $|f(x)-f(c)| = f(c)-f(x) < f(c)/2$. Altså $f(x) > f(c) - f(c)/2 = f(c)/2 > 0$. Men $f(x) \leq 0$, så for alle $x \in A$ må $|x-c| = c-x \geq \delta$. Dermed:

$$c - \delta \geq x \quad \text{for alle } x \in A.$$

Dette motstrider at $c = \sup A$. Selvmotsigelse, altså må $f(c) \leq 0$. Vi får nå: $c<b$. For n høy nok, så vil $c + \frac{1}{n} < b$. Sett $x_n = c + \frac{1}{n}$. Da er $\{x_n\}$ en følge av punkter i $[a,b]$, og $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Ved setning 5.1.10, så må

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

Siden $x_n > c$, må $f(x_n) > 0$ for alle n. Dermed er

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}_{= f(c).} \geq 0$$

Vi har $f(c) \geq 0$ og $f(c) \leq 0$, derfor $f(c) = 0$. $\square$