Ekstremalverdier og grenseverdier

$A \subseteq \mathbb{R}$ delmengde

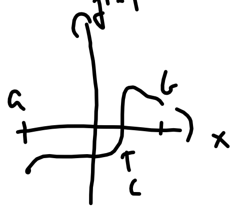
$f : A \to \mathbb{R}$ $A = D_f$ definisjonsområdet til f.

Def. f er kontinuerlig i $a \in A$
dersom det til hver $\varepsilon > 0$ fins en $\delta > 0$
slik at når $|x - a| < \delta$ og $x \in A$
så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Def f er kontinuerlig i $A = D_f$ dersom f er
kontinuerlig i alle punkt $a \in A$.

Setning: Dersom $f : A \to \mathbb{R}$ og $g : A \to \mathbb{R}$
er kontinuerlige så er $f + g : A \to \mathbb{R}$
og $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ begge kontinuerlige.

Skjæringssetning: Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ~~og~~
er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har
motsatt fortegn, så fins det en $c \in (a, b)$
slik at $f(c) = 0$



La $f(x) = \sin x - 2x + 1$
med $D_f = [0, \frac{\pi}{2}]$ f er kontinuerlig.

$f(0) = \sin 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \pi < 0$

Så det fins en $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ slik at
$f(c) = 0$.

Det vil si at ligningen
$\sin x = 2x - 1$ har en
løsning i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$.

$f: A \to \mathbb{R}$

Et punkt $a \in A$ er et <u>maksimumspunkt</u> for f dersom $f(x) \leq f(a)$ for hver $x \in A$.

Et punkt $a \in A$ er et <u>minimumspunkt</u> for f dersom $f(x) \geq f(a)$ for hver $x \in A$.

Et felles ord for disse er <u>ekstrempunkt</u>.

<u>Setning</u>: En kontinuerlig funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ har både maksimums- og minimumspunkter.

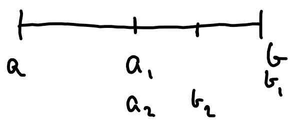
<u>Bevis</u>

Først vil vi vise at f er <u>begrenset</u>

d.v.s at det finnes en M slik at

$$|f(x)| < M \quad \text{for hver } x \in [a,b].$$

Anta at f <u>ikke</u> er begrenset. Vil vise at da kan ikke f være kontinuerlig (i hele $[a,b]$).



Dele $[a,b]$ i to: kan anta f er ubegrenset på $[a_1,b_1]$

Dele $[a_1,b_1]$ i to: kan anta f er ubegrenset på $[a_2,b_2]$

og fortsetter:

antar at f er <u>ubegrenset</u> på $[a_n, b_n]$ $n = 3,4,5,\ldots$

og at $|b_n - a_n| = \dfrac{|b-a|}{2^n}$,

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots < b$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots > a$

så $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er monotone og begrenset

derfor konvergerer de:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

Kan velge $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at $f(c_n) > n$

$a_n \leq c_n \leq b_n$ så $\{c_n\}$ konvergerer

$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, så $\lim_{n\to\infty} c_n = c$

$$\left.\begin{array}{l} c \in [a,b] \text{ så er } f(c) \in \mathbb{R} \\ \text{mens } \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \infty}_{=f(c)} \end{array}\right\} \text{motsigelse}$$

$\square$

Siste del av beviset.

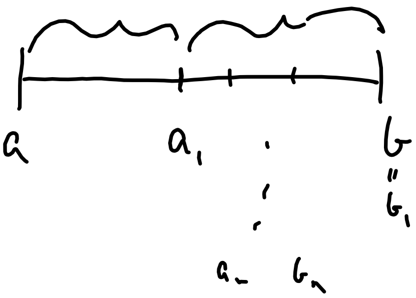
Vet nå $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset

så

$$M = \sup\{ f(x) \mid x \in [a,b] \} \quad \text{fins} \quad M \in \mathbb{R}.$$

<u>Vil finne</u> $c \in [a,b]$ slik at

$$f(c) = M \qquad (c \text{ er da et maksimumspunkt}).$$



deler $[a,b]$ i to og kan anta at $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a_1,b_1]\}$

⋮

deler og deler og kan anta at $M = \underline{\sup\{f(x) \mid x \in [a_n,b_n]\}}$

der $a_1 \le a_2 \le \quad \le a_n \le \quad < b$

$b_1 \ge b_2 \ge \quad \ge b_n \quad > a$

$|b_n - a_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$ så $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$

kan velge $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at

$f(c_n) \geq M - \frac{1}{n}$ (siden $M = \sup..$)

$\lim_{n\to\infty} c_n = c$ (som i første del)

og $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \underline{M = f(c)}$ (f er kontinuerlig i c)

$M - \frac{1}{n} < f(c_n) < M$ for hver n

□

$$f(x) = \sin\left(\frac{e^{(x^2-3)}}{\cos x}\right) \qquad x \in [0,1]$$

har ekstrempunkter !!, siden f er kontinuerlig.

Grenseverdier

$f : A \to \mathbb{R}$

$c \notin A$, men det fins tall i A som ligger så nær c som en vil.

Eks: $a \notin (a, b)$

Def. $f(x)$ nærmer seg L som grense når x nærmer seg c dersom det for hver $\varepsilon > 0$ fins en $\delta > 0$ slik at når $x \in A$ og $0 < |x - c| < \delta$ så er $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Vi skriver $\lim_{x \to c} f(x) = L$

eks: $f(x) = 1 - x$ 

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Regneregler for grense:

Dersom f har grense L når x nærmer seg a
og g ha grense M når x nærmer seg a så
har (1) $f + g$ grensen $L + M$ når x nærmer seg a

(2) $f \cdot g$ grensen $L \cdot M$ — , —

(3) $\frac{f}{g}$ grensen $\frac{L}{M}$ — , — $M \neq 0$

Vil vise (1). Vet $\underbrace{\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M}$ $\leftarrow$

vil vise at $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$

La $\varepsilon > 0$ vil/skal finne $\delta > 0$ slik at når $0 < |x - a| < \delta$ så er $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$

(velger svar) for $\frac{\varepsilon}{2}$ fins det en $\delta_1 > 0$ slik at når $0 < |x - a| < \delta_1$ så er $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

og det fins $\delta_2 > 0$ slik at når $0 < |x - a| < \delta_2$ så er $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

Velg $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$:

Vil vise at $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ når $0 < |x - a| < \delta$

$$|f(x) - L + g(x) - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\square$

$\varepsilon > 0$. Vil finne $\delta > 0$ s.a. $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$ når $0 < |x - a| < \delta$

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - f(x) \cdot M + f(x) \cdot M - LM|$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x) \cdot M - LM|$$

$$= |f(x)||g(x) - M| + |f(x) - L| \cdot |M|$$

kan (enkelt) velge δ_1 slik at $|f(x)| < |L| + 1$ når $0 < |x - a| < \delta_1$

$$< (|L| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2|M|} \cdot |M| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Velger $\delta_3 > 0$ slik at $f(x) < |L| + 1$ og $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2|M|}$ når $0 < |x - a| < \delta_3$

Velger $\delta_4 > 0$ slik at $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)}$ når $0 < |x - a| < \delta_4$

Velger $\delta = \min\{\delta_3, \delta_4\}$ og får da.

$\square$

Varianter av grenseverdier:

– ensidige grenser:

L er en grense for $f(x)$ når x nærmer seg a ovenfra dersom det for hver $\varepsilon > 0$ fins en $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{når } 0 < x - a < \delta$$

$$\Updownarrow$$

skriver $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ $\qquad x \in (a, a+\delta)$

tilsvarende for

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ ..... $x \in (a-\delta, a)$.

$\overline{L \text{"="} \infty}$ $f(x)$ går mot ∞ som grense når x nærmer seg a

Def dersom det for hver $M > 0$ fins en $\delta > 0$ slik at $f(x) > M$ når $0 < x - a < \delta$.

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

$f(x)$ går mot L som grense når x går mot ∞, dersom det for hver $\varepsilon > 0$

Def fins en $M > 0$ slik at $|f(x) - L| < \varepsilon$ når $x > M$. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

eks: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$