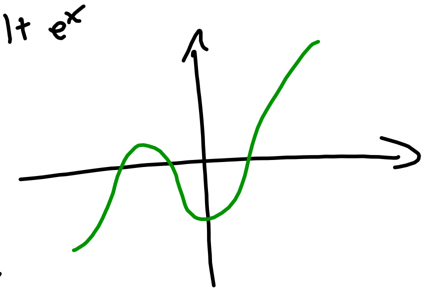
Oblig 1 er ute, frist 19. sep.

Definisjon En funksjon f er kontinuerlig i $a \in D_f$ hvis for enhver $\varepsilon > 0$, så fins en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$ så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Vet at funksjonene x^n, a^x (for $a>0$, spesielt e^x), $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(x)$ er kontinuerlige der de er definert.



Setning I Hvis f og g er funksjoner som er kont. i a, så er $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ også kont. i a.
Hvis $g(a) \neq 0$, så er $\frac{f}{g}$ kont. i a.

Setning II Hvis g er kont i a og f er kont. i $g(a)$, så er funksjonen $h(x) = f(g(x))$ kont. i a.

Eksempel La $f(x) = \dfrac{\ln(x) \cdot \cos(e^x)}{x-3}$. For hvilke a er f kont.?

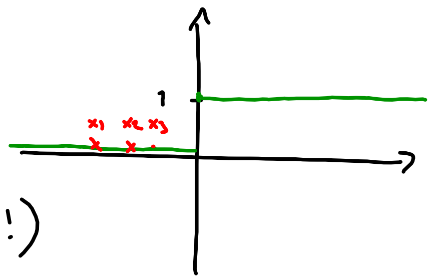
e^x er kont. for alle $a \in \mathbb{R}$. $\cos(x)$ er kont. for alle $a \in \mathbb{R}$.
Setning II sier da at $\cos(e^x)$ er kont. overalt.
$\ln(x)$ er kont. der den er definert, altså når $a \in (0, \infty)$
Setning I sier at $\ln x \cdot \cos(e^x)$ er kont når $a \in (0, \infty)$
$x - 3 \neq 0$ når $x \neq 3$.
Setning I sier at $\dfrac{\ln(x) \cdot \cos(e^x)}{x-3}$ er kont. når $a \in (0, \infty)$ og $a \neq 3$,

altså når $a \in (0,3) \cup (3, \infty)$.
$D_f = (0,3) \cup (3, \infty)$.

Eksempel La $f(x)$ være gitt ved

$f(0)=1$
$$f(x) = 1 \quad \text{når} \quad x \geq 0$$
$$f(x) = 0 \quad \text{når} \quad x < 0$$

Heaviside-funksjonen



Vis at f ikke er kontinuerlig i 0.

Kan bruke definisjonen direkte (god trening!)

Alternativt bruker vi

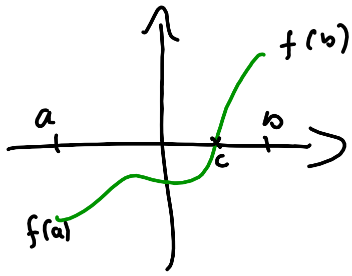
Setning (5.1.10): En funksjon f er kontinuerlig i $a \in D_f$ hvis og bare hvis følgende påstand holder: For alle følger $\{x_n\}$ med $x_n \in D_f$ og $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, så er $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

For å vise at f ikke er kont. i 0, må vi vise at påstanden ikke holder.

Vi må finne én følge $\{x_n\}$ med $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ hvor $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(0)$.

La $x_n = -\frac{1}{n}$. Da er $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = -0 = 0$

$f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = 0$ for alle n. Så $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(0) = 1$. ∎



Skjæringssetningen Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ som er kontinuerlig slik at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn, så fins en $c\in(a,b)$ slik at $f(c)=0$.

Eksempel Vis at ligningen $e^x=2\cos(x)$ har en løsning c med $c\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$e^x=2\cos(x) \iff e^x-2\cos(x)=0$.

Sett $f(x)=e^x-2\cos(x)$.

Må finne $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ slik at $f(c)=0$.

Sjekker om skjæringssetningen kan brukes:

- f er kontinuerlig på hele $[0,\frac{\pi}{2}]$.
- $f(0)=e^0-2\cos 0=1-2\cdot 1=-1<0$
  $f(\frac{\pi}{2})=e^{\pi/2}-2\cos(\frac{\pi}{2})=e^{\pi/2}-2\cdot 0=e^{\pi/2}>0$

Skjæringssetningen sier det fins en $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ slik at $f(c)=0$. ∎

<u>Eksempel</u>: La $f(x) = x^5 + x^2 + x + 5$. Vis at $f(x) = 0$ har en løsning.

$f(x)$ er kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

Regn ut for $a = -10$, $b = 10$

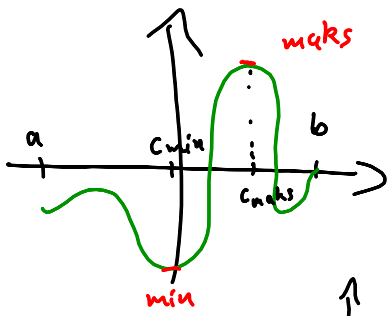
$$f(a) = f(-10) = (-10)^5 + (-10)^2 + (-10) + 5 = -99905 < 0$$

$$f(b) = f(10) = 10^5 + 10^2 + 10 + 5 = 100115 > 0$$

Skjæringssetningen sier at det fins en $c \in (-10, 10)$ slik at

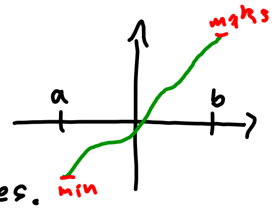
$f(c) = 0$

Ekstremalverdisetningen: La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig. Da har f maksimum- og minimum-punkter på $[a,b]$.



Eksempel La $f(x) = \frac{\ln(x)\cdot\cos(e^x)}{x-3}$.

Vis at $f(x)$ har maks- og min-punkter på $[1,2]$.



Må vite at f er definert og kontinuerlig på $[1,2]$. Vet at f er kont. på $(0,3)\cup(3,\infty)$

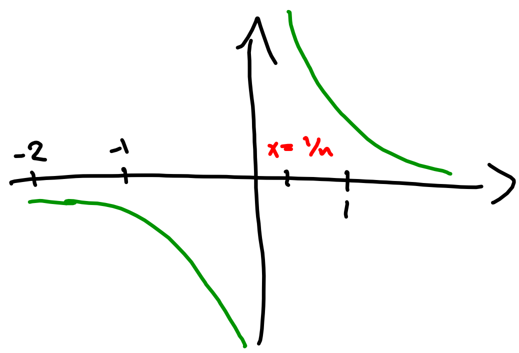
$[1,2]\subset(0,3)$, så f er kont. på $[1,2]$.

Ekstremalverdisetningen sier at maks- og min-punkt finnes.

Donald: „Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig
Ekstremalverdisetningen sier at den har et maks- (og min-)punkt
på $[-1,1]$. Men jeg kan lage $f(x)$ vilkårlig stor ved å ta
$x = \frac{1}{n}$ n et heltall, slik at $f(x) = f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1/n} = n$,
som blir større enn $f(c)$ hvor c er makspunkt ???"

Ole: „f er ikke definert på hele $[-1,1]$, så ekstremalverdisetningen kan ikke brukes".

Prøv $[-2,-1]$

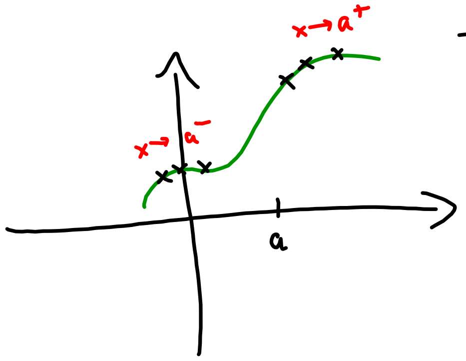


Grenseverdier Har definert $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to a^-} f(x)$
$\lim_{x\to\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Kan bytte ut a med a^+, ∞ osv.

For alle disse gjelder at hvis $\lim_{x\to a} f(x) = F$, $\lim_{x\to a} g(x) = G$,
så er $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = F+G$, $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = F-G$,
$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = FG$,
Hvis $G\neq 0$, så er $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$.

Setning La $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være en funksjon, og la $c\in(a,b)$.
Da er f kont. i c hvis og bare hvis $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Eksempel Finn $\lim_{x\to 5}\frac{\ln(x)\cdot\cos(e^x)}{x-3}$.
Vet fra før at $f(x) = \frac{\ln(x)\cdot\cos(e^x)}{x-3}$ er kont. i $(0,3)\cup(3,\infty)$
Spesielt er f kont. i $[4,6]$ $5\in(4,6)$
Setningen sier $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5) = \frac{\ln 5\cdot\cos(e^5)}{5-3} = \underline{\underline{\frac{\ln 5\cdot\cos(e^5)}{2}}}$.



$\lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to a} f(x)$
$\lim_{x\to a^-} f(x)$

Eksempel Finn $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1/x}{1 - 2/x}$.

Kan prøve $f(x) = \frac{x^2 + 1/x}{1 - 2/x}$ og bruke setningen.
Trenger at f er kont. i 0, men f er ikke en gang definert i 0.

Skriv om litt: $\frac{x^2 + 1/x}{1 - 2/x} = \frac{x^3 + 1}{x - 2}$, sett $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}$.
Da er $D_g = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ og g er kont. på hele D_g.
Spesielt er g kont. i $[-1, 1]$ og $0 \in [-1, 1]$.
Setningen sier at

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1/x}{1 - 2/x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = \lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = \frac{0^3 + 1}{0 - 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$