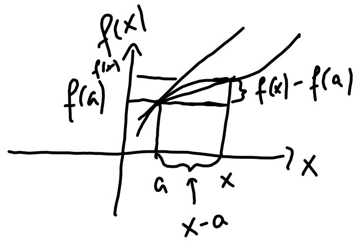
Den deriverte, deriverbarhet, middelverdisetningen.

Def: Anta at funksjonen $f : A \to \mathbb{R}$ er definert i en omegn om $a \in A$ (d.v.s. $(a-c, a+c) \subseteq A$ for en $c > 0$).
Dersom grenseverdien

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{eksisterer}$$

sier vi at f er deriverbar i a og kaller grenseverdien for den deriverte til f i a.

Vi skriver: $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



$f'(a)$ er stigningstallet til tangenten til grafen i $(a, f(a))$.

eks $f(x) = \sin x$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$

sett $h = x - a$, $x = a + h$
da er
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$= \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$$

$$= \frac{\sin a \cdot \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h}$$

$$= \frac{\sin a(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos a \cdot \sin h}{h}$$

$$= \sin a \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}} + \cos a \underbrace{\frac{\sin h}{h}}$$

hva skjer når $h \to 0$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1 - 2\sin^2 \frac{h}{2} - 1}{h} = -\frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h}$$

$$\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \qquad = -\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin\frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

så $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-\sin \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\sin a \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos a \frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \sin a \cdot 0 + \cos a \cdot 1 = \underline{\underline{\cos a}}$$

Dersom $f: A \to \mathbb{R}$ er deriverbar for alle $a \in A$
så er den deriverte en funksjon

Vi skriver $$f': A \to \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D[f(x)]$$

Kjente funksjoner (som "alle" er definert på $\mathbb{R}$).

$$D[a] = 0 \qquad (f(x) = a \text{ en konstant})$$

$$D[x^a] = a x^{a-1}$$

$$D[a^x] = a^x \ln(a) \qquad (a > 0)$$

$$D[\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

$$D[\sin x] = \cos x$$

$$D[\cos x] = -\sin x$$

$$D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$k = 0, \pm 1, \ldots$

<u>Regneregler</u>: Dersom f og g er deriverbare i a så er $f+g$, $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) også deriverbare i a og

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

kjerne-regelen

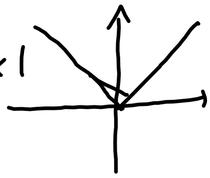
Dersom g er deriverbar i a og f er deriverbar i $g(a)$ så er $h(x) = f(g(x))$ deriverbar i a og

$$h'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Setning: Dersom f er deriverbar i a så er f også kontinuerlig i a.

deriverbar: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\Rightarrow$ $\cancel{\Leftarrow}$ kontinuerlig: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$f(x) = |x|$



$\lim_{x\to a} x - a = 0$

$$f'(a)\cdot 0 = f'(a) \cdot \lim_{x\to a} x-a = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} x-a$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))\cdot(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) = f(a)$$

$\Rightarrow$ f kontinuerlig i a.

middelverdisetningen

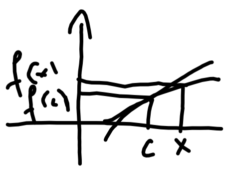
Setning: Anta at funksjonen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ har et maksimum i $c\in(a,b)$, og at f er deriverbar i c, da er

$$f'(c)=0.$$

Bevis: Må vise at hvis $f'(c)>0$ så har f ikke et maksimum i c. (tilsvarende om $f'(c)<0$)

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$$

$\Rightarrow$ (når $x-c>0$ og x er nær c)



$$f(x)-f(c)>0 \Rightarrow f(x)>f(c)$$

$\Rightarrow$ $f(c)$ ikke er maksimum! $\square$

Rolle:

Anta at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar på (a, b) og at

$$f(a) = f(b).$$

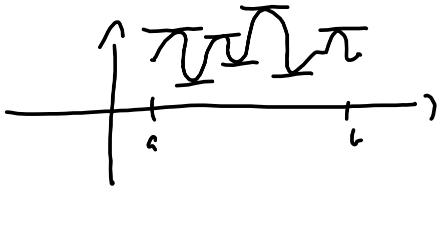
Da fins det en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = 0.$$

har f et maksimum eller minimum i (a, b)?

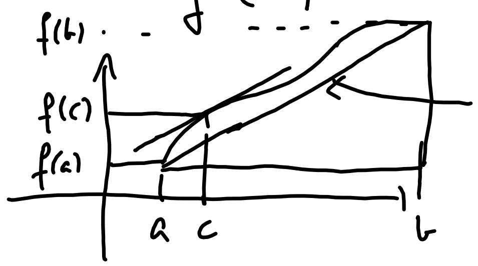
- vet at f har et maksimum og et minimum i $[a, b]$. (av kontinuitet)
- hvis maksimum og minimum er i endepunktene, så er funksjonen konstant og $f'(c) = 0$ for alle $c \in (a, b)$.
- hvis $c \in (a, b)$ er et maksimum, så er $f'(c) = 0$ (av forrige setning)

tilsvarende om c er et minimum.



Setning: Dersom $f: [a,b]$ er kontinuerlig og f er deriverbar i (a,b), fins det en $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



stigningstallet til denne "sekanten" er $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(c)$ er stigningstallet til tangenten til grafen i $(c, f(c))$

Bevis La $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

$h(x)$ er kontinuerlig på $[a,b]$
$h(x)$ er deriverbar på (a,b)

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a)$$

$$= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

$\Rightarrow h(a) = h(b)$

så av Rolles setning: det fins en $c \in (a,b)$ s.a $h'(c) = 0$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \square$$