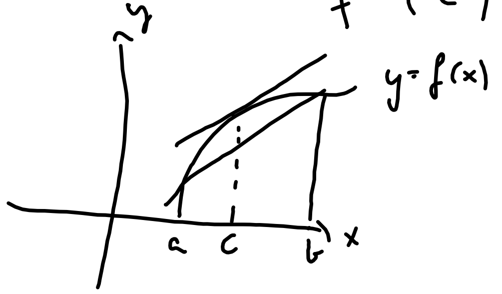
L'Hôpital

(anvendelser av middelverdisetningen)

MVS: Dersom en funksjon f er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b) så fins det en $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Korollar: Dersom f er kontinuerlig på $[a,b]$ og $f'(c) > 0$ for hver $c \in (a,b)$, så er f voksende på $[a,b]$.

Tilsvarende $f'(c) < 0$ for hver $c \in (a,b) \Rightarrow f$ avtagende

$f'(c) = 0$ — , — $\Rightarrow f$ konstant.

Bevis: Vil vise at dersom $a \le x_1 < x_2 \le b$ så er $f(x_1) < f(x_2)$.

Vet av MVS at det fins en $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

men $f'(c) > 0$ så $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$

men da er $f(x_2) - f(x_1) > 0$

som betyr $f(x_2) > f(x_1)$. $\square$

Cauchy's MVS Dersom f, g er kontinuerlige på $[a,b]$ og deriverbare på (a,b), så fins det $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (g'(c) \neq 0)$$

Bevis

La $h(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x)$

Da er h kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b).

MVS: Det fins en $c \in (a,b)$ s.a

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \leftarrow$$

$$h(b) = [g(b) - g(a)]\, f(b) - [f(b) - f(a)]\, g(b)$$
$$h(a) = \text{—"—}\; f(a) - \text{—"—}\; g(a)$$
$$h(b) - h(a) = [g(b) - g(a)](f(b) - f(a)) - [f(b) - f(a)](g(b) - g(a)) = 0$$

Så $h'(c) = 0$

$$h(x) = [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x)$$
$$h'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x) - [f(b) - f(a)]\, g'(x)$$

$$h'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c) - [f(b) - f(a)]\, g'(c) = 0$$

$$\left(\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ g'(c) &= \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \end{aligned} \right)$$

$$[g(b) - g(a)]\, f'(c) = [f(b) - f(a)]\, g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \square$$

L'Hôpital: Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ og $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (og at $g \neq 0$ i en omegn om a)

Anta videre at $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer, (også om grensen er ∞ eller $-\infty$)

Da eksisterer også $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ og

$$\underline{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bevis: $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$

så vi kan sette $f(a) = 0$ og $g(a) = 0$

så f, g blir kontinuerlige i a.

Cauchy MVS: det finnes en c: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ der c ligger mellom x og a.

Antar $\lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$

så $\underline{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

L'Hôpital gjelder også for ensidige grenser.

eks $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{?}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\cos x - 1$, x^2 er kontinuerlige og deriverbare i en omegn om 0.

$\lim_{x\to 0} (\cos x - 1) = 0$ | $(\cos x - 1)' = -\sin x$

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ | $(x^2)' = 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{\sin x}{x}$ $\frac{\cos x}{1}$
$\downarrow$ $\downarrow$
1 1

L'Hôpital: $\underline{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

$\Downarrow$

$(\sin x)' = \cos x$

L'Hôpital: Dersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

og $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer så eksisterer også

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ og de to er like.

$x = \frac{1}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} x = \infty$

så anta at $\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ og $\lim_{t\to 0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$

og at $\lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$ eksisterer $(= L)$. ←

$\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right) = D\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

$D\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

$\frac{D f\left(\frac{1}{t}\right)}{D g\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \to L$

Så $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{D\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{D\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)} = L.$

$\overset{\text{L'Hopital}}{\Longrightarrow}$ $\underline{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}} = \underline{\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{D\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{D\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)}} = L$

$= \underline{\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}} =$

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{L'H}}{\Leftarrow} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Eks

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x \qquad \text{"} 0 \cdot (-\infty) \text{"} \text{ uttrykk}$$

$$x\ln x = \frac{x \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\tfrac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$$

siden $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

Så er ved l'Hôpital $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.

$$\text{"} \lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad 1^\infty$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} \qquad a > 0 \quad a = e^{\ln a}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln(1 + \tfrac{1}{x}) \qquad \infty \cdot 0$$

$$x \ln(1 + \tfrac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \qquad \ln(1+\tfrac{1}{x})' = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (\tfrac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\| \qquad \frac{x}{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

så $\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln(1+\frac{1}{x}) \overset{L'H.}{=} 1$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \underline{\underline{e}}$$

ehs
$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{(\ln x)^a}{x^b}\right| = 0 \qquad a, b > 0$$

Bevis:
$$\frac{(\ln x)^a}{x^b} = \left(\frac{\ln x}{x^{b/a}}\right)^a \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{b/a}} \overset{*}{=} 0 \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x^{b/a})' = \frac{b}{a}\cdot x^{b/a-1} \qquad \frac{(\ln x)'}{(x^{b/a})'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0$$

l'H

$$= \frac{a}{b}\cdot x^{-1-\frac{b}{a}+1}$$

$$= \frac{a}{b} x^{-\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{b}{a}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0 \qquad a, b > 0.$$

$$\frac{x^b}{e^{ax}} = \left(\frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}}\right)^b$$

!

$$\frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}} \qquad (x)' = 1 \qquad (e^{\frac{a}{b}x})' = \frac{a}{b}\cdot e^{\frac{a}{b}x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x'}{(e^{\frac{a}{b}x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{a}{b}e^{\frac{a}{b}x}} = 0$$

l'H

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}} = 0$$

$\square$.