Hvordan føre en god oppgavebesvarelse?

Klar og nyddig besvarelse med tydelige begrunnelser

(1) La $z, w \in \mathbb{C}$.
Hvis $z+w$ og $zw \in \mathbb{R}$ så er $z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \overline{w}$.

Kladd:

og: $z = \overline{w}$

$z = a+ib$
$w = c+id$

$z+w = a+c+i(b+d)$
$zw = ac-bd+i(ad+bc)$

$b+d=0$ og $ad+bc=0$
$b=-d$ og $ad+bc=0$
$b=-d$ og $ad-dc=0$
$d(a-c)=0$

$b=-d$ og $d=0$ eller $b=-d$ og $a=c$

$z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \overline{w}$

Hva skal vi vise?
Antagelser
Argumentasjon
Konklusjon

Synonymer:
Vi ser at...
Følgelig....
Dermed er ...
Dvs. ....
Altså er ....
Det medfører ...

Bevis:

La $z, w \in \mathbb{C}$.
Vi kan skrive
$z = a+ib$, $w = c+id$ der
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
Anta at $z+w$ og $zw \in \mathbb{R}$.
Vi vil vise at $z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \overline{w}$.
(Vi velger å vise dette direkte.)

Vi har at

$z+w = a+c+i(b+d)$
$zw = ac-bd+i(ad+bc)$
Siden $z+w$ og $zw \in \mathbb{R}$
følger det at
$b+d=0$ og $ad+bc=0$
$b=-d$ og $ad+bc=0$
$b=-d$ og $ad-dc=0$
$d(a-c)=0$
som gir
(1) $b=-d$ og $d=0$ eller (2) $b=-d$ og $a=c$
(1) gir $z=a$, $w=c$, dvs. $z, w \in \mathbb{R}$
(2) gir $z=a+ib$ og $w=a-ib$, dvs. $z=\overline{w}$.
Så $z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \overline{w}$. ∎

(2) La $\{a_n\}$ være følgen gitt ved

$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad$ for $n \geq 1$.

Vis at $a_n \leq 2$ for alle $n \geq 1$.

Kladd:

$0, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots$

$a_n \leq 2$

a_1 ok

$a_n \leq 2$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$

Bevis:

La $\{a_n\}$ være følgen gitt ved

$a_1 = 0, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ for $n \geq 1$.

Vi vil vise at $a_n \leq 2$ for alle $n \geq 1$.

Vi bruker induksjon:

Siden $a_1 = 0 \leq 2$ stemmer påstanden for $n = 1$.

Anta at $n \geq 1$ slik at $a_n \leq 2$.

Vil vise at $a_{n+1} \leq 2$.

Vi har

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siden } a_n \leq 2}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

Ved induksjon følger det at $a_n \leq 2$ for alle $n \geq 1$. ∎

Derivasjon og grenseverdier med og uten L'Hôpital.

Derivasjon.

La $f(x) = |\cos^3 x \cdot e^{\tan x}|^{\sin x}$

er definert for alle $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k = 0, \pm 1, \ldots$

f er kontinuerlig (der den er definert).

f er også deriverbar —— " ——

$$D[a^x] = a^x \ln a$$

$$D(\ln|f(x)|) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad \text{kjerneregelen}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot D(\ln|f(x)|) \quad \leftarrow \text{"HUSK"}$$

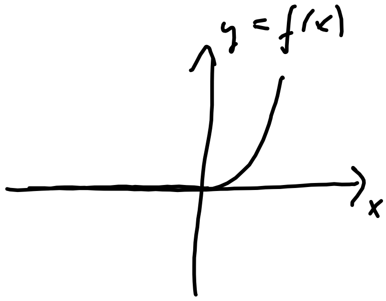
$$f(x) = |\cos^3 x \; e^{\tan x}|^{\sin x} \Rightarrow \ln|f(x)| = \sin x(\ln \cos^3 x + \ln e^{\tan x})$$

$$f'(x) = |\cos^3 e^{\tan x}|^{\sin x} \; D(\sin x(3\ln\cos x + \tan x))$$

$$= |\cos^3 x e^{\tan x}|^{\sin x}\left(\cos x(3\ln|\cos x| + \tan x) + \sin x\left(\frac{3}{\cos x}\cdot(-\sin x) + 1 + \tan^2 x\right)\right)$$

$$= |\cos^3 x e^{\tan x}|^{\sin x}\left(3\cos x \ln|\cos x| + \cos x \tan x - 3\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin x \tan^2 x\right).$$

La $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$



Finn $f'(0)$!

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{?}{=}$$

Ser på $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} 0 = \underline{0}$

Ser også på $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x = \underline{0}$

Dermed er også $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

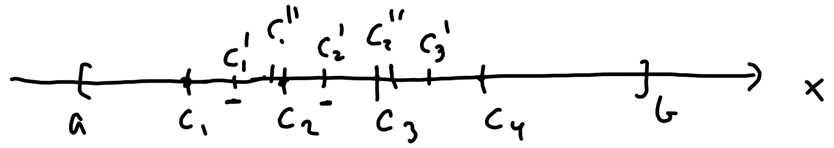
og $\underline{\underline{f'(0) = 0}}$.

Bruk Rolle's setning.

Rolle's: hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b) og $f(a) = f(b)$ så fins det en $c \in (a,b)$ slik at $f'(c) = 0$.

<u>oppg</u>: Vis at hvis f er deriverbar på (a,b) og bare har ett nullpunkt for f'', da har f <u>høyst</u> tre nullpunkt mellom a og b

Anta at f har <u>fire</u> nullpunkt, $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = f(c_4) = 0$



Av Rolle fins c_1', c_2', c_3' slik at $f'(c_1') = f'(c_2') = f'(c_3') = 0$.

Av Rolle's setning igjen fins det $c_1'' \in (c_1', c_2')$ og $c_2'' \in (c_2', c_3')$ slik at $f''(c_1'') = f''(c_2'') = 0$.

$c_1'' \neq c_2''$ så f'' har minst to nullpunkt, mot antagelsen i oppgaven $\square$.

<u>så f har høyst tre nullpunkt.</u>

Vil vise

$$\lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0 \qquad \underline{a,b>0}$$

$$x^a|\ln x|^b = \left(\underline{x^{\frac{a}{b}}|\ln x|}\right)^b$$

$$x^{\frac{a}{b}}|\ln x| = \frac{|\ln x|}{x^{-\frac{a}{b}}} \qquad \text{"}0\cdot\infty\text{"}$$

$$\left.\begin{aligned} D(|\ln x|) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ D(x^{-\frac{a}{b}}) &= -\frac{a}{b}x^{-\frac{a}{b}-1} \end{aligned}\right\} \frac{D(|\ln x|)}{D(x^{-\frac{a}{b}})} = \frac{x^{-1}}{-\frac{a}{b}x^{-\frac{a}{b}-1}} = \underline{-\frac{b}{a}\cdot x^{\frac{a}{b}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{b}{a}x^{\frac{a}{b}} = 0 \overset{L'H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+}\frac{|\ln x|}{x^{-\frac{a}{b}}} = \lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{a}{b}}|\ln x|\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\underline{x^{\frac{a}{b}}|\ln x|}\right)^b = \lim_{x\to 0^+} x^a|\ln x|^b = \underline{\underline{0}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$f'(1) \overset{?}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} \leftarrow$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{x}\cdot 1 - \ln x(x-1)}{(x-1)^2}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x} - \ln x(x-1)}{(x-1)^2}$$

feil.

$\square$.