Repetisjon matriserekning / funksjoner av flere variable

Oppvarming La $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

Hva er AB?

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2&0\cdot1+1\cdot2&1\cdot1+2\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot0+1\cdot1&1\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}}}.$$

Hva er BA? BA er ikke definert.

$$2\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}}^{3}\begin{pmatrix}?&\\&\end{pmatrix}$$

Oppgave Ved semesterstart går x_0 studenter matte og y_0 studenter fysikk. Hver uke bytter 10% av matte-studentene til fysikk, og 20% av fysikk-studenter til matte.
La x_n være antall matte-studenter etter n uker
La y_n —"— fysikk-studenter — " ——.

Finn en matrise M slik at
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$
og en matrise N slik at
$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Svar: Vi ser at $\underline{x_{n+1} = \underbrace{0.9x_n}_{\text{gjenværende fra uke } n} + \underbrace{0.2y_n}_{\text{avhoppere fra fysikk}}}$

Tilsvarende $y_{n+1} = 0.8y_n + 0.1x_n$.
La $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vil finne a, b, c, d.
$$M\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ cx_n + dy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$
Må ha $a = 0.9$, $b = 0.2$, $c = 0.1$, $d = 0.8$.
$$\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}}}$$
Hva er N slik at $\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$?
Kan sette $N = M \cdot M = M^2$, siden
$$N\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = MM\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Kan regne ut
$$N = M^2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9^2 + 0.1 \cdot 0.2 & 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 \\ 0.9 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.1 & 0.2 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.8 \end{pmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.83 & 0.34 \\ 0.17 & 0.66 \end{pmatrix}}}.$$

Finnes det en matrise P slik at
$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad ? \qquad \left(\text{Vet at } M\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

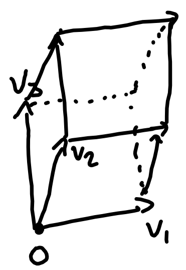
Svar: $P = M^{-1}$ fungerer: $P\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^{-1}\left(M\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right)$
(hvis M er invertarbar)
$$= M^{-1}M\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = (M^{-1}M)\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

<u>Oppgave</u> Hva er volumet til parallellepipedet utspent av vektorene

$\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$

$\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$

$\vec{v}_3 = (3, 0, 0)$



<u>Svar</u>: Volumet er gitt ved

$|\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)|$, eller

$|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)|$.

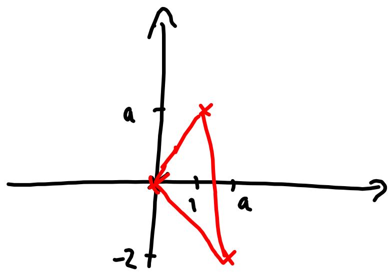
Regner ut determinanten $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 0) - 2 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) + 0 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 0)$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$$

Oppgave Se på trekanten med hjørner i punktene $(0,0)$, $(1,a)$, $(a,-2)$, a et vilkårlig tall. Finn a slik at arealet blir minst mulig.



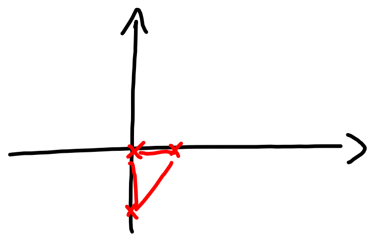
Svar: Arealet til trekanten er gitt ved

$$F(a) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -2 \end{vmatrix}\right|$$

$\vec{v}_1 = (1, a)$

$\vec{v}_2 = (a, -2)$

Regner ut $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - a \cdot a = -2 - a^2$.



$F(a) = \left|\frac{1}{2}(-2 - a^2)\right| = \left|-1 - \frac{1}{2}a^2\right|$.

Siden $a^2 \geq 0$, så $-1 - \frac{1}{2}a^2 \leq -1 < 0$, så

$F(a) = \left|-1 - \frac{1}{2}a^2\right| = 1 + \frac{1}{2}a^2$.

$F'(a) = a$, $\quad F'(a) = 0$ når $a = 0$

$F''(a) = 1$, så $a = 0$ er et minimumspunkt.

Arealet er minst når $a = 0$.

Funksjoner av flere variable

Oppgave: La $f(x,y,z) = \ln(x^2+2y^2+z^3)$

Finn
- gradienten til f i punktet $(1,1,0)$
- den retningsderiverte $f'((1,1,0);\vec{r})$ med $\vec{r}=(0,0,1)$
- retningen hvor f vokser raskest fra $(1,1,0)$
- stigningstallet til f i denne retningen.

Svar: Finner de partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+2y^2+z^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{4y}{x^2+2y^2+z^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{3z^2}{x^2+2y^2+z^3}.$$

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+2y^2+z^3}(2x,\ 4y,\ 3z^2).$$

$$\nabla f(1,1,0) = \frac{1}{3}(2,4,0) = \underline{\underline{\left(\tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{3},\ 0\right)}}$$

Den retningsderiverte $f'((1,1,0);\vec{r})$ med $\vec{r}=(0,0,1)$

$$\nabla f(1,1,0)\cdot\vec{r} = 0\cdot\tfrac{2}{3} + 0\cdot\tfrac{4}{3} + 1\cdot 0 = \underline{0.}$$

Retningen fra $(1,1,0)$ hvor f vokser raskest er nettopp

$$\nabla f(1,1,0) = \underline{\underline{\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3},0\right)}}$$

Stigningstallet til f i retning $\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3},0\right)$ er

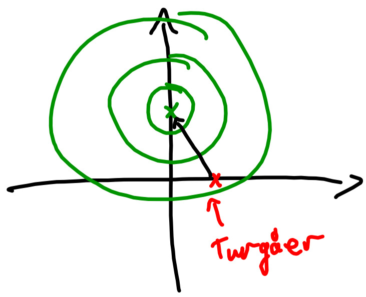
$$|\nabla f(1,1,0)| = \sqrt{\left(\tfrac{2}{3}\right)^2+\left(\tfrac{4}{3}\right)^2+0^2} = \sqrt{\frac{4+16}{9}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{20}}{3}}}$$

Oppgave En turgåer befinner seg ved et fjell, i et koordinatsystem er personen i punktet $(1,0)$

Terrengets høyde over havet i punktet (x,y) er gitt ved

$$h(x,y) = 2469 e^{-x^2-(y-2)^2}$$

I hvilken retning bør man gå for å gå brattest mulig?



Svar: Finner

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2469 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-(y-2)^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2469 \cdot (-2y+4)\, e^{-x^2-(y-2)^2}$$

h avhenger bare av $x^2+(y-2)^2$, altså bare av avstanden fra (x,y) til $(0,2)$

$$\nabla h(x,y) = 2469 \cdot e^{-x^2-(y-2)^2}(-2x, -2y+4)$$

$$\nabla h(1,0) = 2469 \cdot e^{-1-4}(-2,4) = \underline{2469 \cdot e^{-5}}(-2,4)$$

Turgåeren bør gå i retning $\underline{\underline{(-2,4), \text{ eller } (-1,2)}}$