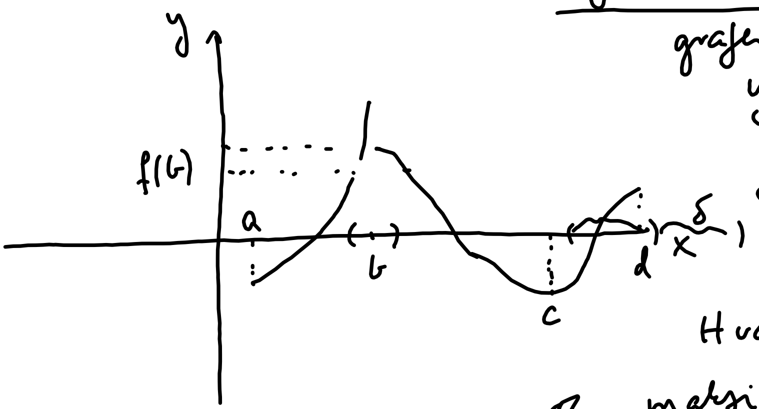
Kurvedrøfting, konkavitet/konveksitet og asymptoter



grafen til $y = f(x)$ der $f : [a, d] \to \mathbb{R}$

Hva er lokale minimums- og maksimumspunkter til f?

lokale maksimumspunkter: $\underline{d}$, ~~b~~, (~~ingen~~)

lokale minimumspunkter: $\underline{c}$, $\underline{a}$

<u>Def</u>: $c \in D_f$ er et lokalt maksimumspunkt for f dersom det fins en $\delta > 0$ slik at

om $x \in \underline{(c-\delta, c+\delta) \cap D_f}$ så er $\underline{f(x) \le f(c)}$

(tilsvarende for lokalt minimum)

c er et <u>globalt</u> maksimum dersom $f(x) \le f(c)$ for alle $x \in \underline{D_f}$.

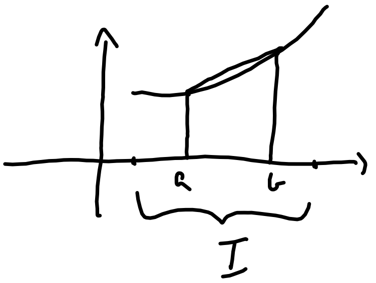
<u>Setning</u>: Om $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum (eller minimum) i c så er

① c et endepunkt eller
② $f'(c) = 0$
③ f er ikke deriverbar i c

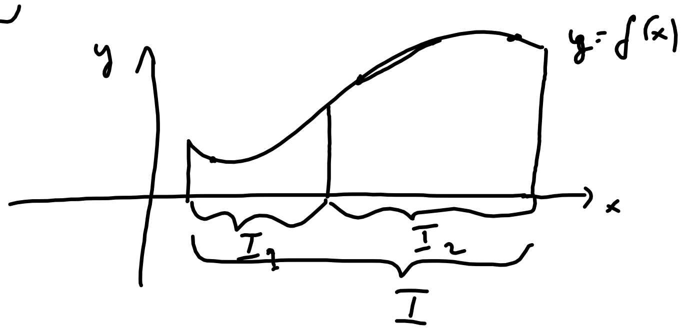
<u>Bevis</u>: ② følger av setning i forrige uke. □

konveks / konkav.

Def: Funksjonen f er konveks på intervallet I dersom for hvert par av punkter $a, b \in I$, $a < b$, så ligger linjestykket fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ ovenfor grafen til f.



Tilsvarende er f konkav dersom linjestykket ligger under grafen.

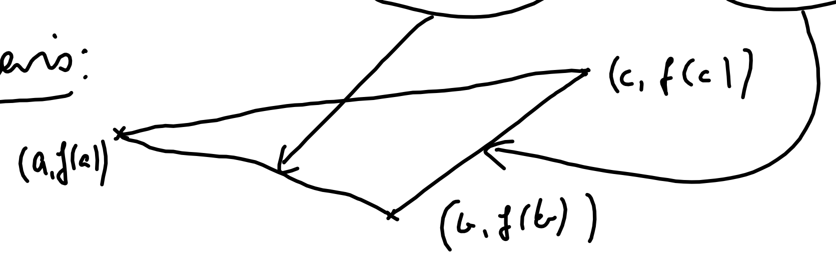


f er konveks på I_1 og konkav på I_2

Lemma: f er konveks på I hvis og bare hvis for hvert trippelarpunkter a, b, c der $a < b < c$ så er

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \quad (*)$$

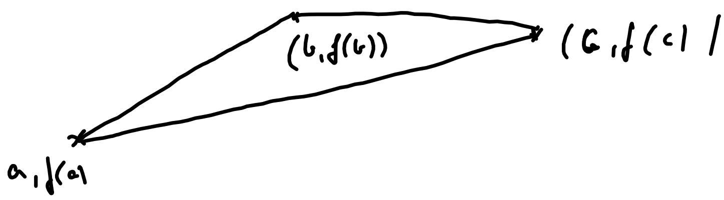
Bevis:



f konveks $\Rightarrow$ $*$ er ok.

Anta at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \quad (**)$$



$(**) \Rightarrow$ f ikke er konveks.

$\square$

Setning: Dersom f er kontinuerlig på intervallet I og $f''(x) \geq 0$ for hver x i det indre av intervallet, da er f konveks på I.

(tilsvarende er f konkav dersom $f''(x) \leq 0$ på I).

Bevis La a, b, c være tre punkter i I $a < b < c$

$$c_1 \in (a,b) \quad f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(c_2) \quad c_2 \in (b,c)$$

$f''(x) \geq 0$ på I så er f' voksende på I

$c_1 < c_2$ så

$$f'(c_1) \leq f'(c_2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

av Lemma vet jeg da at f er konveks.

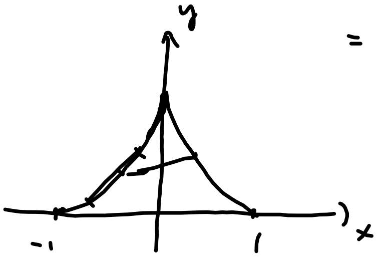
D.

eks: $f(x) = 1 - x^{2/3}$ $\quad D_f = [-1, 1]$

$f'(x) = -\left(\frac{2}{3} x^{2/3 - 1}\right) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ $\quad x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$.

$f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3} - 1}$

$= \frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} > 0$ for $x \neq 0$



f er konveks på $[-1, 0]$ og på $[0, 1]$

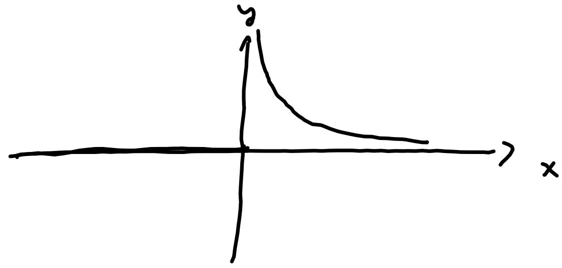
Asymptoter.

Def. f har en vertikal asymptote i a når x nærmer seg a ovenfra dersom

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

(Tilsvarende når $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ eller $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$



Vi sier at $x=0$ er en vertikal asymptote.

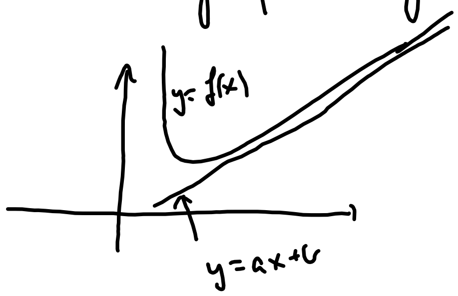
Vertikale asymptoter: (hvor finner vi dem?)

- der en får 0 i nevner (der f ikke er definert)
- der f ikke er kontinuerlig.

skrå asymptoter

Def: Linje $y = ax + b$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ er
en (skrå) asymptote for f når x går mot ∞
(mot $-\infty$)
dersom $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$.
$(x \to -\infty)$

Spesielt, når $a = 0$: $y = b$ er en (horisontal)
asymptote for f dersom $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.



(Dersom $y = ax + b$ er en
skrå asymptote for f og
f er deriverbar så er
$\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = a$)

Oppskrift for å finne skrå asymptote.

① Undersøke $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Dersom denne grensen
er a, så vil en eventuell skrå asymptote
ha stigningstall a.

② Hvis ① er en suksess så undersøker vi
$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$. Dersom denne
grensen eksisterer og er b så er
$y = ax + b$ en skrå asymptote.

Eksempel:

$$f(x) = \sqrt{x^4 + x^3} - x^2$$

skrå asymptote? $x \to \infty$.

(1)

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^4+x^3} - x^2}{x} = \frac{\left(\sqrt{x^4+x^3} - x^2\right)\left(\sqrt{x^4+x^3} + x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4+x^3} + x^2\right)}$$

$$= \frac{x^4+x^3 - x^4}{x\left(\sqrt{x^4+x^3} + x^2\right)} = \frac{x^3}{x\sqrt{x^4+x^3} + x^3} \quad \begin{matrix} \cdot \frac{1}{x^3} \\ \cdot \frac{1}{x^3} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{x^3}{x^4}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \sqrt{x^4+x^3} - x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^4+x^3} - x^2 - \frac{1}{2}x\right)\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}} \qquad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$x \to \infty$

L'H

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} + \frac{1}{2}}{-\frac{2}{x}} \qquad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$x \to \infty$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}}}{-2}$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} -\frac{1}{8}.$$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ er skrå asymptote til f.