Substitusjon i integraler: Vil finne $\int f(x)\,dx$.

- Velg en funksjon $u(x)$
- $\frac{du}{dx} = u'(x) \rightsquigarrow dx = \frac{1}{u'(x)}\,du$ (huskeregel, ikke brøkregning!)
- $\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{1}{u'(x)}\,du$
- Skriv $f(x)\cdot\frac{1}{u'(x)}$ som funksjon av u, løs integralet i u.
- Sett inn uttrykket $\underline{u = u(x)}$ i svaret.

Eks: Finn $\int x e^{x^2}\,dx$

Velger $u(x) = x^2$

$u'(x) = 2x$

$dx = \frac{1}{u'(x)}\,du = \frac{1}{2x}\,du$

$$\int x e^{x^2}\,dx = \int x e^{x^2}\cdot\frac{1}{2x}\,du = \int \frac{1}{2}e^{x^2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{2}e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}}$$

Eks: Finn $\int \cos(\ln(x))dx$. Bruker z i stedet for u.

$z(x) = \ln(x)$

$z'(x) = \frac{1}{x}$

$dx = \frac{1}{z'(x)}dz = \frac{1}{1/x}dz = x\,dz$

$x = e^z$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = \int \cos(\ln(x))\,x\,dz = \int \cos(z)e^z\,dz.$$

Bruker delvis integrasjon

Setter $u' = \cos(z)$ $v = e^z$

$u = \sin(z)$ $v' = e^z$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int \cos(z)e^z\,dz = \sin(z)e^z - \int \sin(z)e^z\,dz \qquad (1)$$

Bruker delvis integrasjon igjen på $\int \sin(z)e^z\,dz$.

Setter $u' = \sin(z)$ $v = e^z$

$u = -\cos(z)$ $v' = e^z$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int \sin(z)e^z\,dz = -\cos(z)e^z - \int -\cos(z)e^z\,dz$$

$$= \int \cos(z)e^z\,dz - \cos(z)e^z \qquad (2)$$

Setter inn (2) i (1), får

$$\int \cos(z)e^z\,dz = \sin(z)e^z - \left(\int \cos(z)e^z\,dz - \cos(z)e^z\right)$$

Flytter over $\int \cos(z)e^z\,dz$, får

$$2\int \cos(z)e^z\,dz = \sin(z)e^z + \cos(z)e^z + C$$

:2

$$\int \cos(z)e^z\,dz = \frac{\sin(z)e^z + \cos(z)e^z}{2} + C$$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = \frac{\sin(\ln(x))e^{\ln(x)} + \cos(\ln(x))e^{\ln(x)}}{2} + C = \frac{x\left(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))\right)}{2} + C$$

Et <u>spesielt eksempel</u>: Finn $\int \frac{1}{2x}\,dx$

Ok: $\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C_2$

Hva hvis vi setter $u(x) = 2x$

$u'(x) = 2$

$dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2}\,du = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x| + C_1$$

<u>Forklaring</u>

$$\ln|2x| = \ln(2\cdot|x|) = \ln 2 + \ln|x|$$

$$\frac{1}{2}\ln|2x| + C = \frac{1}{2}(\ln 2) + \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + (C + \frac{1}{2}\ln 2)$$

konstant

konstant

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{2}\ln 2$$

Substitusjon i bestemt integral

For å regne ut $\int_a^b f(x)\,dx$ via substitusjon, har man to metoder

Metode 1: Finn den antiderivert $F(x) = \int f(x)\,dx$, og bruk

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Metode 2: Utfør substitusjon med $u(x)$ på $\int_a^b f(x)\,dx$, og bytt grenser fra $\int_a^b$ til $\int_{u(a)}^{u(b)}$ når dx byttes til du.

Eksempel $\int_0^4 x^{1/2}\,dx$

Metode 1: $F(x) = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$

$$\int_0^4 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} = \frac{16}{3}$$

Metode 2: Sett $u(x) = x^{1/2}$

$u'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

$dx = \frac{1}{u'(x)}du = 2x^{1/2}du$
$= 2u\,du$

$$\int_0^4 x^{1/2}\,dx = \int_{u(0)}^{u(4)} x^{1/2}\,2u\,du = \int_0^2 u\cdot 2u\,du$$

$$= \int_0^2 2u^2\,du = \left[\frac{2}{3}u^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Eksempel: Finn $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

Setter $u(x) = \ln(x)$

$u'(x) = \frac{1}{x}$

$dx = \frac{1}{u'(x)}du = x\,du$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{u(1)}^{u(e)} \frac{\ln x}{x}\,x\,du = \int_0^1 u\,du$$

$$= \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Delbrøkoppspalting: Metode for å finne $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, hvor P og Q er polynomer.

F.eks. $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$

Steg 1: Skriv om $\frac{P(x)}{Q(x)}$ til $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$ med P_1, P_2 polynomer, og grad av P_2 < grad av Q. (polynomdivisjon)

Eks: $\frac{x^4}{x^2-1} = \frac{(x^4-x^2)+x^2}{x^2-1} = \frac{x^2(x^2-1)+x^2}{x^2-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^2-1}$

$$= x^2 + \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{(x-1)(x+1)} = x^2+1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$P(x)=x^4 \quad Q(x)=x^2-1$

$P_1(x)=1+x^2 \quad P_2(x)=1$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int P_1(x)dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}dx$, vi vet hva $\int P_1(x)dx$ er, holder å se på $\int \frac{P_2(x)}{Q(x)}dx$

Vi kan derfor se på $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ hvor grad P < grad Q.

Steg 2: „Finn" den reelle faktoriseringen til $Q(x)$

$$Q(x) = a(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\cdots(x-r_i)^{n_i}(x^2+a_1x+b_1)^{m_1}\cdots(x^2+a_jx+b_j)^{m_j}$$

(algebraens fundamentalteorem!)

Teorem: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kan alltid skrives som en sum av (enklere) brøker av to typer

① $\frac{A}{(x-r_\ell)^e}$ $e=1,\dots,n_\ell$ A en konstant

② $\frac{Bx+C}{(x^2+a_\ell x+b_\ell)^e}$ $e=1,\dots,m_\ell$ B, C konstanter

Eks: Funksjonen $\frac{x^2+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)^2}$ kan skrives som en sum

$$= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$

Kan finne verdier $A, B, \dots, G$ slik at dette stemmer: Ganger vi med $(x+1)(x-1)^2(x^2+1)^2$ på begge sider, får vi 7 ligninger i 7 ukjente $(A,\dots,G)$ (puh!), som kan løses.

Brøker av type ① er enkle å integrere, de av type ② er mulige å integrere. eks $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+C$

Finn $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$ (ny oppgave)

Kan skrive

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Ganger med $(x-1)(x+1)^2$ på begge sider:

$$1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

$$1 = A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)$$

$$0x^2 + 0x + 1 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C)$$

Gir ligninger

$$\begin{array}{ll} \text{I} & A+B=0 \\ \text{II} & 2A+C=0 \\ \text{III} & A-B-C=1 \end{array}$$

Legger sammen ligningene

I + II + III

$$A+\cancel{B}+2A+\cancel{C}+A-\cancel{B}-\cancel{C} = 0+0+1$$

$$4A = 1$$

$$A = \frac{1}{4}$$

I gir $B = -A = -\frac{1}{4}$

II gir $C = -2A = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{A}{(x-r)}\,dx = A\ln|x-r| + C$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{-1/2}{(x+1)^2}$$

$n>1$: $\int \frac{A}{(x-r)^n}\,dx = \frac{-A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-r)^{n-1}} + C$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{1}{(1+x)} + C}$$