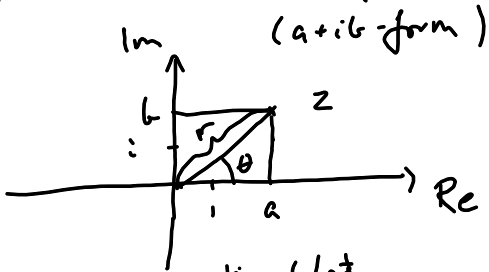
$\mathbb{C}$ 2013 11a, 2014 11 2016 11

funksjoner 2011 13 2014 14

---

$\mathbb{C}$: $z = a + ib = re^{i\theta}$

(a+ib-form) polarform




$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$

$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Setning: Hvert komplekst polynom med komplekse koeffisienter faktoriserer i lineære faktorer. (med komplekse koeffisienter).

Hvert reelt polynom med reelle koeffisienter faktoriserer i lineære og andregrads faktorer.

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \quad + a_n$

$(P(z))$ $a_i \in \mathbb{C}$ komplekst polynom

$a_i \in \mathbb{R}$ reelt –"–

2013
11

$$P(z) = z^4 - 8z^2 - 9$$

reell og
komplekes faktorisering.

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

$z_1, z_2, \ldots z_4$ er røttene til $P(z)$; siden $P(z)$ er reelt
så opptrer de ikke-reelle røttene i konjugerte par
$(P(z_i) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}_i) = 0)$

Vil finne $z_i$-ene:

$$z^4 - 8z^2 - 9 = 0$$

$$(z^2)^2 - 8z^2 - 9 = 0$$

$$z^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 9}}{2} = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = \pm 3$ eller $z = \pm i$.

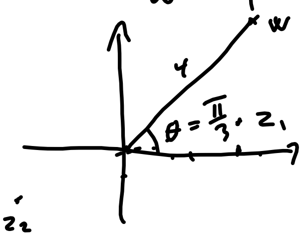
R. Komplekes faktorisering: $P(z) = (z-3)(z+3)(z+i)(z-i)$

Reell faktorisering: $P(z) = (z-3)(z+3)(z^2+1)$

$\frac{2019}{11}$ : kvadratrøtter til $w = 2 + 2i\sqrt{3}$ er

$z$ slik at $z^2 = w$.

$w$ på polarform: $r = |w| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \underline{4}$




$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{2\sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$z^2 = w = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ eller $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ $\qquad \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi$

$$\underline{z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i} \qquad \underline{z_2 = -\sqrt{3} - i}$$

b) Løs

$$iz^2 + 2z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0$$

ABC-formel:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot i\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}}{2i}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2i\sqrt{3} - 2}}{2i} = \frac{-2 \pm \sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}}{2i} \leftarrow$$

av a-delen

$$= \begin{cases} \dfrac{-2 + \sqrt{3} + i}{2i} \\ \dfrac{-2 - \sqrt{3} - i}{2i} \end{cases} = \begin{cases} +i - \frac{i}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ +i + \frac{i}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\frac{1}{i} = -i}$

$\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

$$-\frac{2}{2i} = +2\cdot\frac{i}{2} = +i \qquad = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)i \\ \underline{-\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)i} \end{cases}$$ røttene i likningen

2016

nr. 11 $\quad P(z) = z^3 - 13z^2 + 52z - 70$

Vis at $z = 3+i$ er en rot i $P(z)$ $\quad (P(3+i) \overset{?}{=} 0)$

$$P(3+i) = (3+i)^3 - 13(3+i)^2 + 52(3+i) - 70$$

$$= (3^3 + 3\cdot 3^2 \cdot i + 3\cdot 3\cdot i^2 + i^3) - 13(3^2 + 2\cdot 3\cdot i + i^2) + 52(3+i) - 70$$

$$= 3^3 + 3\cdot 3(-1) - 13\cdot 3^2 - 13\cdot(-1) + 52\cdot 3 - 70$$
$$3\cdot 3^2\cdot i - i - 13\cdot 2\cdot 3\cdot i + 52\cdot i$$

$$= 3^2(3 - 1 - 13) + 13 + 12\cdot 13 - 70 + (27 - 1 - 78 + 52)i$$
$$= -3^2\cdot 11 + 169 - 70 + 0\cdot i$$
$$= 0.$$

$P(z)$ er reelt. $\quad P(3+i) = 0 \Rightarrow P(3-i) = 0$

$$P(z) = z^3 - 13z^2 + 52z - 70 \qquad z_1 z_2 z_3 = 70$$
$$= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \qquad -(z_1 + z_2 + z_3) = -13$$

$z_1 = 3+i \quad z_2 = 3-i \quad \Rightarrow z_3 = 13 - 3 - 3 - i + i = 7$

røttene til $P(z)$ er $3+i$, $3-i$ og $7$

b)
$$P(z) = (z - (3-i))(z - (3+i))(z - 7)$$
$$= (z - 3 + i)(z - 3 - i)(z - 7) \qquad \text{komplekse faktorisering}$$
$$= ((z-3)^2 - i^2)(z - 7)$$
$$= (z^2 - 6z + 10)(z - 7) \qquad \text{reell faktorisering.}$$

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$
$$= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3$$

Funksjoner

2011 nr. 13

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

a) Vis at $f$ e kontinuerlig. (i hele definisjonsområdet)
$\overset{\shortparallel}{(0,\infty)}$

Når $x \neq 1$ er $f$ definert som en kvotient der teller og nevner e kontinuerlige funksjoner, med nevner forskjellig fra $0$, så $f$ e kontinuerlig på $(0,1)$ og $(1,\infty)$.

$f$ e kontinuerlig i $x=1$ dersom
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1.$$

Undersøker $\dfrac{\ln x}{x-1}$ når $x \to 1$. Teller og nevner går mot $0$, så vi bruker l'Hopital.

$$\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} \to 1 \quad \text{når } x \to 1 \quad \text{så}$$

og. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1 = f(1)$, så

$f$ er kontinuerlig også i $x=1$.

11.6 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$x \neq 1$: $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$ ✓

i $x=1$: $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x} \frac{1-x}{(x-1)} = -\frac{1}{2}$

så $f$ er deriverbar i $x=1$ og $f'(1) = -\frac{1}{2}$

c) $F(x) = \int_1^{x} f(t)\,dt$ $F: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$F'(x) \overset{?}{=}$

er $F$ strengt voksende?

Analysens fundamentalsetning. $F'(x) = f(x)$
gjelder forbi $f$ er kontinuerlig på $(0,\infty)$, altså integrerbar på $[1,x]$, $[x,1]$..

$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$F$ er strengt voksende, derom $f(x) = F'$ er positiv på $(0,\infty)$.

$0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$, $x - 1 < 0$ så $f(x) > 0$.
$x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$, $x - 1 > 0$ så $f(x) > 0$

$f(1) = 1 > 0$ så $f > 0$ på hele $(0,\infty)$, så $F$ vokser strengt på $(0,\infty)$.

d) Finn $F''(x)$

$$\underline{F''(x)} = f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} & x \neq 1 \\ -\frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$$

Vil nå vise at $F$ er konkav.

Hvis $\underline{F'' < 0}$ på $(0,\infty)$ så er $F$ konkav.

Vil vise at $F'' = f' < 0$ på $(0,\infty)$.

nok å vise at $1 - \frac{1}{x} - \ln x < 0$ når $x \neq 1$.

siden nevneren $(x-1)^2 > 0$.

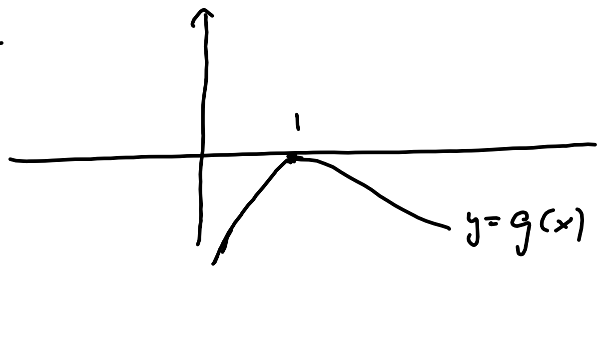
Hva med $\underline{g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x}$ $g: (0,\infty)$

$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \underline{> 0}$

$x \in (1,\infty)$ $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \underline{< 0}$

$\underline{g(1)} = 1 - 1 - \ln 1 = \underline{0}$

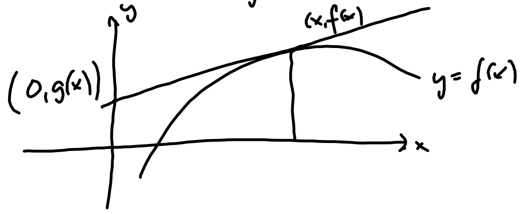



$\Rightarrow g < 0$ på $(0,\infty)$

$\underline{F \text{ er konkav}}$.

2014, 14

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




$f$ har kont. annen derivert.

a) $(0, g(x))$ er skjæring mellom tangent og y-aksen så

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - 0} = f'(x).$$

$$f(x) - g(x) = x \cdot f'(x)$$

$$\underline{g(x) = f(x) - x\, f'(x)} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Vil vise at om
$f$ er konkav, så er $g(0)$ minste verdien til $g$.
$f$ er konveks, så er $g(0)$ største verdien til $g$.

Finner først $g'$:

$$\underline{g'(x)} = f'(x) - f'(x) \underline{- x \cdot f''(x)}$$
$$= \underline{- x\, f''(x).}$$

om $f$ er konkav så er $f''(x) < 0$ $(\Rightarrow g'(x) = -x f''(x))$
om $f$ er konveks er $f''(x) > 0$

$f''(x) < 0 \Rightarrow g'(x) = -x f''(x) = 0$ i $x = 0$
og skifter fortegn fra minus til pluss i $x = 0$, så $g$ har minimalverdi i $x = 0$.
tilsvarende skifter $g'$ fortegn fra positivt til negativt om $f'' > 0$ i $x = 0$, så da har $g$ maksimalverdi i $x = 0$.

---

b) Vis at $\int_0^a g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx - a f(a)$

$$\int_0^a f(x) - x f'(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a \underline{x f'(x)}\,dx$$

bruker delvis integrasjon
$(x \cdot f(x))' = \underline{x \cdot f'(x)} + f(x)$

$$= \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a (x f(x))'\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

a. f. setning

$$= \underline{\underline{2\int_0^a f(x)\,dx - a f(a)}}$$