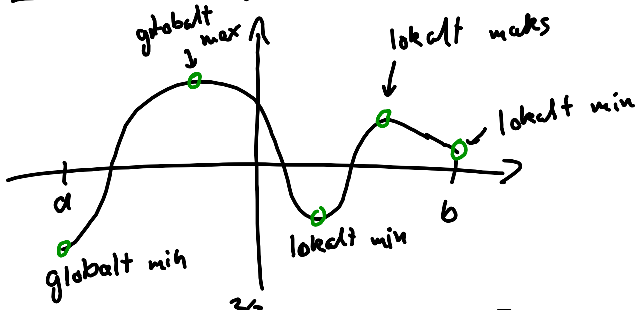
Kurvedrøfting



La $\underline{f(x) = x^5 (x-2)^{2/3}}$, $x \in [-1,3]$. Finn lokale og globale maks og min pkt

Def: $x \in [a,b]$ er et kritisk punkt hvis enten $\quad D_f = [a,b]$

1. x er et endepunkt
2. $f'(x) = 0$
3. $f'(x)$ er ikke definert

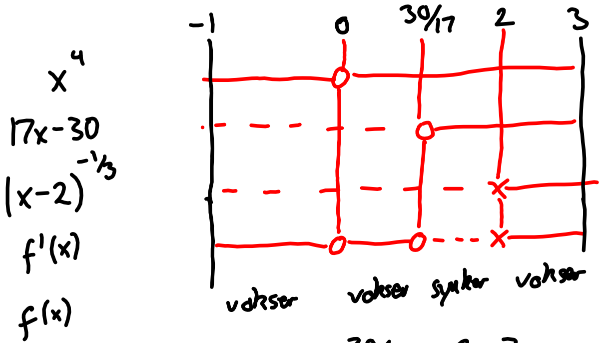
Hvis x er et lokalt maks/min-pkt, så er x kritisk punkt.

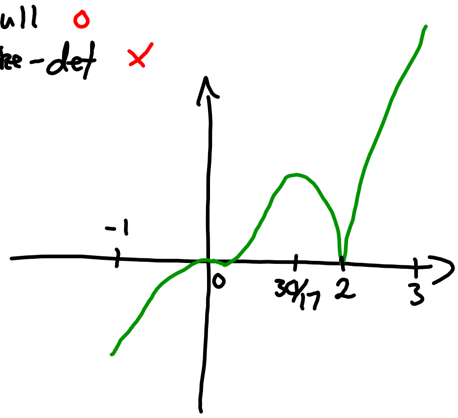
$$f'(x) = 5x^4 (x-2)^{2/3} + x^5 \tfrac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = 5x^4(x-2)^{2/3} + \frac{2x^5}{3(x-2)^{1/3}}$$

$$= \frac{5x^4(x-2)}{(x-2)^{1/3}} + \frac{2x^5}{3(x-2)^{1/3}} = \frac{x^4(17x-30)}{3(x-2)^{1/3}} = \frac{1}{3} \cdot x^4 \cdot (17x-30) \cdot (x-2)^{-1/3}$$

Fortegnsskjema

positiv ——— null o
negativ - - - - ikke-def ×





Kritiske pt. er $-1, 0, 30/17, 2, 3$

Lokale maks er $30/17$, 3

Lokale min er -1, 2

Globale maks? $f(30/17) \approx 6.5 \quad f(3) = 243$

3 er globalt maks

Globale min? $f(-1) = -2.1 \quad f(2) = 0$

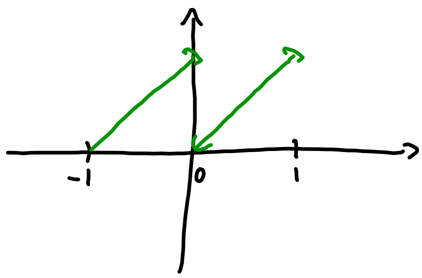
-1 er globalt min.

To spesielle eksempler

La $f(x): [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{hvis } x \in [-1,0] \\ x & \text{hvis } x \in (0,1] \end{cases}$$

Finn max og min-punkter til f på $[-1,1]$.



Når $x \in (-1,0)$, er $f(x) = 1+x$
$f'(x) = 1$

Når $x \in (0,1)$, er $f(x) = x$
$f'(x) = 1$

Når $x=0$, da er $f'(x)$ er ikke definert.

(fordi f ikke en gang er kontinuerlig i 0.)

Kritiske punkter er $-1, 1$, og 0

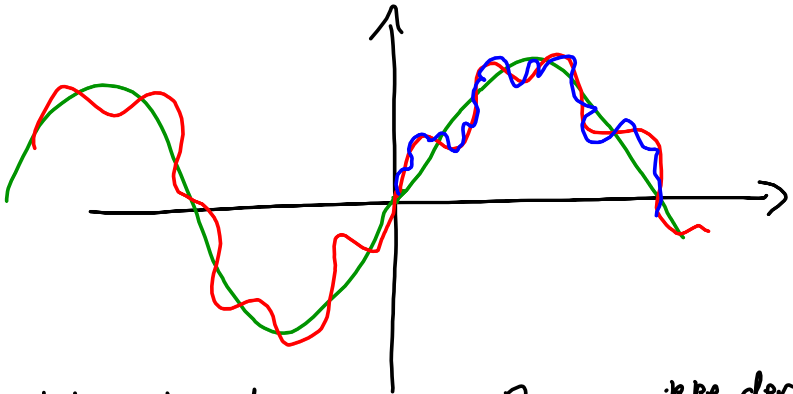
-1 er globalt min-punkt

0 og 1 er globale maks-punkt.

Weierstross-funksjonen La $f(x)$ være definert ved

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{8}\sin(8x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sin(2^n x).$$

Dette gir mening, og f er en veldefinert funksjon



f er faktisk kontinuerlig i alle $x \in \mathbb{R}$, men ikke deriverbar på noe intervall (a,b).

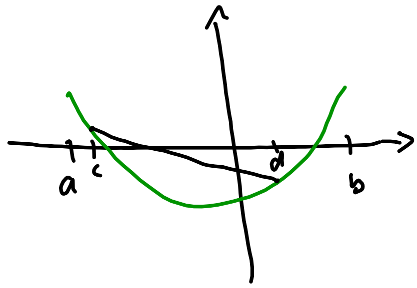
Spørsmål: Har f noe maks-punkt mellom $[0,4]$?

Ja, siden f er kontinuerlig, sier ekstremalverdisetningen at f har maks- (og min-) punkt på $[0,4]$.

Konveksitet/konkavitet

Definisjon: En funksjon f definert på $[a,b]$ er konveks på $[a,b]$ hvis for alle $c, d \in [a,b]$, så er linjestykket mellom $(c, f(c))$ og $(d, f(d))$ over grafen til f.

(Konkav = under grafen)

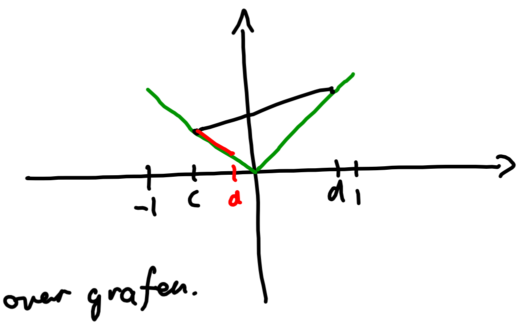


Setning: Hvis $f''(x) \geq 0$ for alle $x \in (a,b)$, så er f konveks. (konkav: ≤ 0)

Eksempel: La $f(x) = |x|$. Er f konveks i $[-1,1]$?

Finner $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{når } x < 0 \\ 1 & \text{når } x > 0 \\ \text{udefinert} & \text{når } x = 0 \end{cases}$ (siden $f(x) = -x$ da) (siden $f(x) = x$ da)

Da er $f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x < 0 \\ 0 & \text{når } x > 0 \\ \text{udefinert} & \text{når } x = 0 \end{cases}$



Ser av grafen at med $c, d \in [-1,1]$ så er linjestykket fra $(c, f(c))$ til $(d, f(d))$ over grafen.

På $[-1,0]$, så er f konkav.

<u>Eksempel</u>: La $f(x) = -x^{2/3}$. Er f konveks på $[-1,1]$?

$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$, $f''(x) = \frac{2}{9}x^{-4/3} = \frac{2}{9x^{4/3}}$.

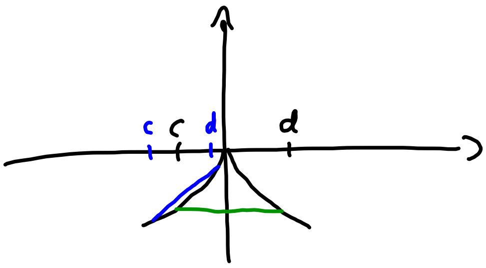
Når $x \neq 0$, er $x^4 > 0$, så $x^{4/3} > 0$, så $f''(x) > 0$

Når $x = 0$, er $f''(x)$ ikke definert.

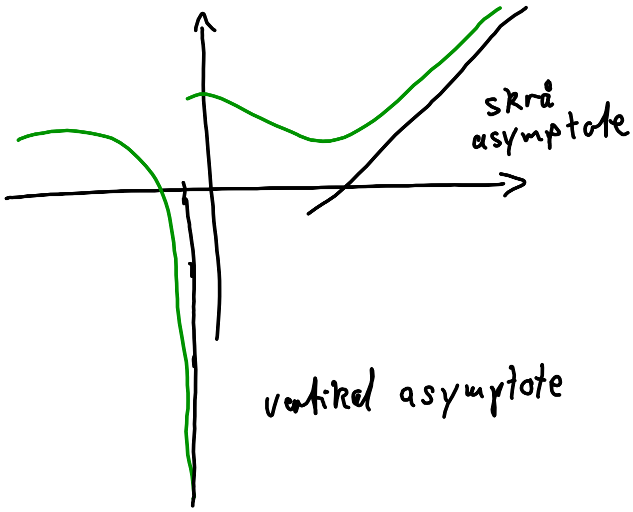
f er konveks på $[-1,0]$

f er konveks på $[0,1]$

f er ikke konveks på $[-1,1]$



Asymptoter



La $f(x) = \frac{1}{x} + x + x^{1/3}$.

Finn asymptotene til f.

Vertikale asymptoter: f er definert på hele $\mathbb{R}$ unntatt i 0.

Må finne $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{1/3}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

f har en vertikal asymptote når x går mot 0 ovenfra og nedenfra.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{1/3}}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

Skråasymptoter ① Beregn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, sett $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

② Beregn $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax)$, hvis begge grensene finnes, er $ax + b$ en asymptote for f når x går mot ∞.

(+ samme prosedyre med $\lim\limits_{x\to -\infty}$)

$f(x) = \frac{1}{x} + x + x^{1/3}$

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{x^2}} + 1 + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{-2/3}}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - \underset{\substack{\parallel\\ x}}{ax}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + x + x^{1/3} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\overset{\substack{0\\ \uparrow}}{\frac{1}{x}} + x^{1/3}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{1/3} = \infty \text{ (eller finnes ikke)}$$

f har ingen skrå asymptote når x går mot ∞

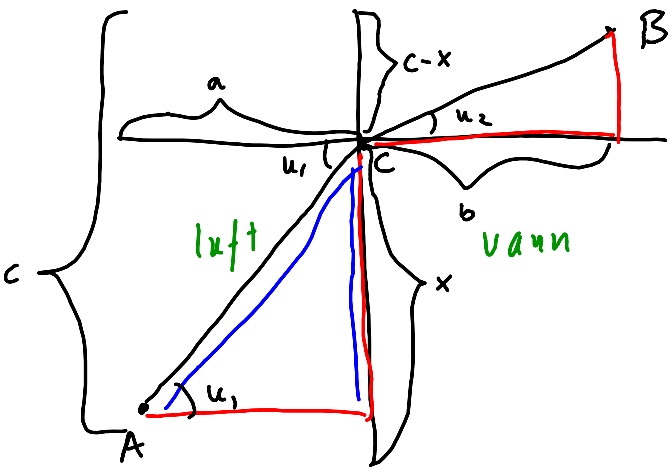
Tilsvarende regning gir samme svar når x går mot $-\infty$.

Snells brytningslov:

Lysstråle fra A, treffer B.

Hvis lyshastigheten i medium 1 er v_1 og (luft)
i medium 2 er v_2, så er

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin u_1}{\sin u_2}$$



Fermats prinsipp: Lyset vil minimere reisetiden mellom A og B

Pytagoras

Avstand $AC = \sqrt{x^2+a^2}$. $BC = \sqrt{b^2+(c-x)^2}$

Reisetid $AC = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}$ Reisetid $BC = \dfrac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$

Total reisetid er $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$

Vil finne min-punkt til t

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{(c-x)}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Hvis $t'(x)=0$, så er $\dfrac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin(u_1) \qquad \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \sin(u_2)$$

$$\frac{\sin u_1}{v_1} = \frac{\sin u_2}{v_2}$$

$$\frac{\sin u_1}{\sin u_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$