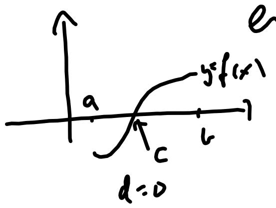
Funksjoner - drøfting av funksjoner.

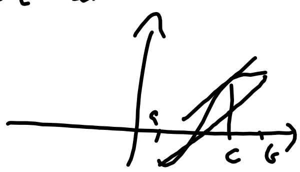
2012	12
2013	12
2017	3, 6

- skjæringssetningen: Dersom $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(a) < d < f(b)$ så finns det en $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = d$.



- middelverdisetningen: Dersom $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og f er deriverbar på (a, b) så finns det en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La $f : D_f \to \mathbb{R}$ $f(a)$ $a \in D_f$ er en maksimalverdi for f dersom $\underline{f(x) \leq f(a)}$ for hver $x \in D_f$.

minimalverdi $\underline{f(x) \geq f(a)}$ $x \in D_f$.

$f(a)$ er ekstremverdi dersom $f(a)$ er maks- eller minimalverdi.

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ har en ekstremverdi

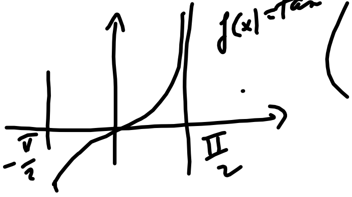
dersom ① f er kontinuerlig

② f er deriverbar på (a,b) og $f'(c) = 0$ for en $c \in (a,b)$

$f(x) = a \quad a \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

moteks: → $f(x) = x^3$



$\left(f(x) = \frac{x}{x} \quad [-1,1] . \right)$

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & x \neq \pm \frac{\pi}{2} \\ 0 & x = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

2012 nr. 12

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \underline{x + \ln x + 2}$ $g(x) = \underline{e^x}$

vis at det fins en $x > 0$ slik at $f(x) = g(x)$.

Nok å vise at $h(x) = f(x) - g(x)$ har ~~et~~ nullpunkt.

siden f og g begge er kontinuerlige, så er

også h kontinuerlig på $(0,\infty)$

$h(1) = 1 + \ln 1 + 2 - e^1 = 3 - e > 0$.

$h(10) = 10 + \ln 10 + 2 - e^{10} < 20 - e^{10} < 0$.

av skjæringssetningen fins det en $c \in (1, 10)$ slik

at $h(c) = 0$ det vil si

$\underline{f(c) = g(c)}$.

2013 w.12

$$f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{\sin x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

a) Vil vise at f er kontinuerlig i 0.

Nok å vise at $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

siden $\arctan x$ og $\sin x$ er kontinuerlige og kontinuerlig deriverbare i $x = 0$ så bruker jeg l'Hopital: $\lim_{x \to 0} \arctan x = 0$ $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

så $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\arctan x)'}{(\sin x)'}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} = 1$, så $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

og f er kontinuerlig i $x = 0$.

b) asymptoter ?

$D_f = (-\pi, \pi)$ så f har ikke horisontale eller skrå asymptoter.

Siden f er kontinuerlig, har f ikke vertikale asymptoter i D_f.

Hva med $x = \pm \pi$?

siden $\arctan \pm\pi \neq 0$

mens $\sin(\pm \pi) = 0$, så er $x = \pm \pi$ begge vertikale asymptoter for f.

c vil vise at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x \sin x} = 0.$$

uttrykket er type "$\frac{0}{0}$" når $x \to 0$ så vi bruker l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{\sin x + x\cos x}$$

igjen et "$\frac{0}{0}$" uttrykk, så l'Hopital en gang til:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

(av L'Hopital) får vi $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x \sin x} = 0$!

---

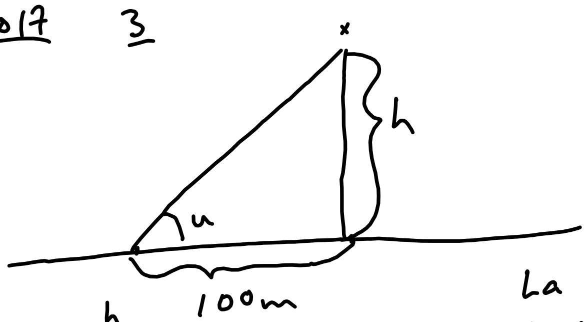
d) er f deriverbar i $x = 0$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\arctan x}{\sin x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x \sin x} = 0 \quad (\text{av (c)})$$

så f er deriverbar i $x = 0$ og $\underline{f'(0) = 0}$!

2017 3



$\tan u = \frac{h}{100}$

$u(t)$

$u = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{d}{dt}u = 0.03$

$u'(t)$

La $f(t)$ være høyden til fallskjermen ved tidspunkt t.

$h = f(t) = f(u(t)) = 100 \cdot \tan(u(t))$

Vil finne $f'(t)$ når $u = \frac{\pi}{4}$.

$f'(t) = 100 \cdot \frac{1}{\cos^2(u(t))} \cdot u'(t) \overset{u=\frac{\pi}{4}}{=} 100 \cdot \frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4})^2} \cdot -0.03$

$= 100 \cdot 2 \cdot (-0.03) = -6$

Så fallskjermen faller med hastighet $6\,ms^{-1}$ når $u = \frac{\pi}{4}$.

6:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \underline{e^{-x} \sin(e^x)} = \frac{\sin(e^x)}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} = \underline{0}$$

siden $\sin(e^x) \in [-1,1]$, mens $e^x \to \infty$ når $x \to \infty$.

$$g'(x) = -e^{-x} \cdot \sin(e^x) + \underline{e^{-x}} \cdot \cos(e^x) \cdot \underline{e^x}$$

$$= \underline{-\frac{\sin(e^x)}{e^x}} + \underline{\underline{\cos(e^x)}}$$

Første ledd går mot 0 når $x \to \infty$, mens det andre ikke har noen grense når $x \to \infty$,

<u>Så $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ eksisterer ikke</u>.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f er to ganger deriverbar og f'' er kontinuerlig.

anta at $b \in \mathbb{R}$,

$$\left(f(x) + f'(x)(b-x) \right)'$$
$$= f'(x) + f''(x)(b-x) + f'(x)\cdot(-1)$$
$$= f''(x)(b-x)$$

$*$

$$\Rightarrow \int_a^b f''(x)(b-x)\,dx = \Big[f(x) + f'(x)(b-x) \Big]_a^b$$
$$= f(b) + f'(b)(b-b) - f(a) - f'(a)(b-a)$$
$$= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) \qquad !$$

c) Anta at det fins en $M > 0$ s.a $|f''(t)| \le M$ for alle t, og at $b > a$. Vil vise

$$\frac{1}{2}M(b-a)^2 \ge \underbrace{|f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)|}_{\left|\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx\right|}$$

$$\left| \int_a^b f''(x)(b-x)\,dx \right| \le \int_a^b |f''(x)|(b-x)\,dx$$
$$\le \int_a^b M(b-x)\,dx = M\int_a^b (b-x)\,dx$$
$$= M\Big[bx - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_a^b$$
$$= M\Big[b^2 - \tfrac{1}{2}b^2 - ab + \tfrac{1}{2}a^2\Big]$$
$$= \tfrac{1}{2}M(b-a)^2$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{|f(b)-f(a)|}_{|A|} \ge \Big(\underbrace{|f'(a)|}_{|B|} - \underbrace{\tfrac{1}{2}M(b-a)}_{|C|}\Big)(b-a). \quad 0.$$

?

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}M(b-a)^2}_{C} \ge \Big| \underbrace{f(b) - f(a)}_{A} - \underbrace{f'(a)(b-a)}_{B} \Big|$$

vet: $|A - B| \le C$

da $\underbrace{|B-A|}_{\ge |B| - |A|} \le C \Longrightarrow |A| \ge |B| - |C| \qquad !$

$|B| - |A| \le C \Rightarrow |B| - |C| \le |A|$

$\square$

d) : $\underline{\varepsilon\text{ - argument.}}$