9.5 Uegentlige integraler

Vi har definert: $\int_a^b f(x)\,dx$ der $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon.

- Hva om $b = \infty$?
- Hva om f er kontinuerlig på $[a,b)$, men ikke definert i b ?

$\int_a^\infty f(x)\,dx$, der $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig,

er definert som grensen $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

dersom denne grensen eksisterer.

Hvis grensen eksisterer sier vi at

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer,

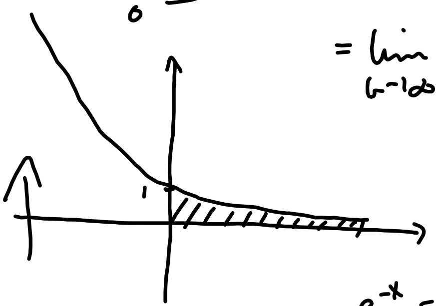
hvis ikke sier vi at

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerer.

eksempler

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}-(-e^{0})\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx \qquad = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = \underline{\underline{1}}$$



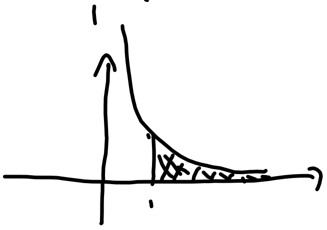
$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ konvergerer!

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ og er lik 1.

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

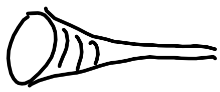
$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^b$$

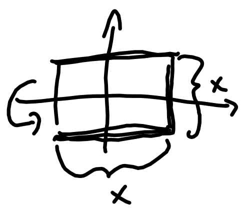
$$= \ln b - \ln 1 = \ln b \xrightarrow[b\to\infty]{} \infty$$



så $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$ eksisterer ikke,

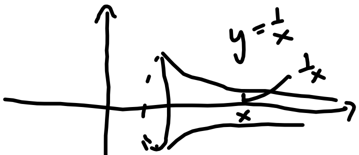
derfor divergerer $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.





$A = x^2$

$V = \pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot x$
$= \frac{\pi}{4}x^3$.



$$V = \int_1^\infty dV = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\,dx$$

$$\underbrace{dV}_{} = \underbrace{\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot dx}_{}$$

$$\int_1^b \frac{\pi}{x^2}\,dx = \pi\int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \pi\left(-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right)$$

$$= \pi\left(1-\frac{1}{b}\right) \xrightarrow[b\to\infty]{} \pi$$

så $\int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\,dx$ konvergerer mot $\underline{\pi}$!

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \int_1^b x^{-p}\,dx \qquad \underline{\underline{p \neq 1}}$$

$$= \left[\frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p} \right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-p}\, b^{1-p} - \frac{1}{1-p}\, 1^{1-p}$$

$$= \frac{1}{1-p}\, \underline{b^{1-p}} - \frac{1}{1-p}$$

$$1-p > 0 \Leftrightarrow 1 > p$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \infty & p < 1 \\ -\frac{1}{1-p} & p > 1 \end{cases}$$

$$1-p < 0 \qquad 1 < p$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ konvergerer når $p > 1$ og er lik $\frac{1}{p-1}$ og divergerer når $p \leq 1$.

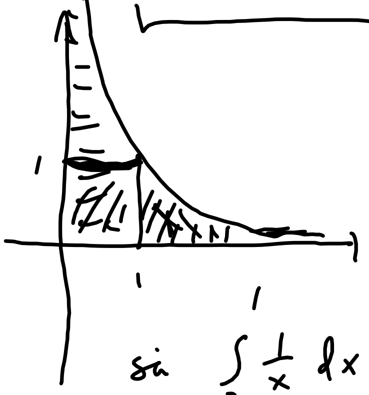
La $f: [a, b)$ være en kontinuerlig funksjon.

Dersom $\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx$ eksisterer sier vi at $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer og er lik denne grensen.

Hvis grensen ikke eksisterer sier vi at integralet divergerer.

Tilsvarende om $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, dersom $\lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx$ eksisterer, sier vi at $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer og er lik grensen.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \overset{?}{=} \lim_{y \to 0^+} \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx$$



$$= \lim_{y \to 0^+} \left[\ln x\right]_y^1$$

$$= \lim_{y \to 0^+} (\underset{0}{\underset{\parallel}{\ln 1}} - \ln y) = \infty \quad y \to 0^+$$

så $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergerer.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\right]_y^1$$

$$= \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\,\underline{y}^{1-p}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{når } p<1 \\ \infty & \text{når } p>1 \end{cases}$$

$1-p>0 \Leftrightarrow 1>p$

$1-p<0$

$p>1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer når $p<1$ og er lik $\frac{1}{1-p}$, og divergerer når $p \geq 1$.

Dersom $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og $\int_a^d f(x)\,dx$ konvergerer for en $d\in(a,b)$ og $\int_d^b f(x)\,dx$ konvergerer for en $d\in(a,b)$, sier vi at $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer.

Det er da lik $\int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$.

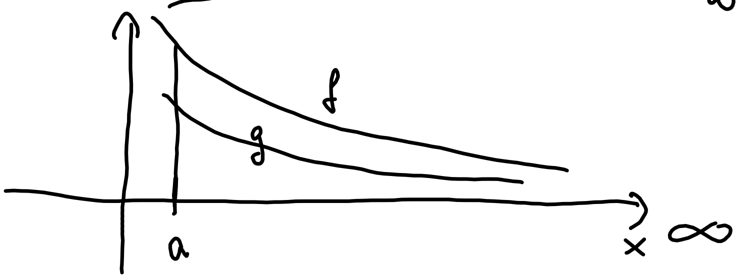
sammenlikning

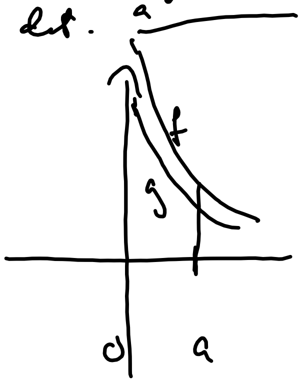
Dersom $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige funksjoner, og $f(x), g(x) > 0$ for alle $x \in [a, \infty)$, og

$g(x) < f(x)$ for hver $x \in [a, \infty)$ da vil

$\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergere dersom $\int_a^\infty f(x)\,dx$ gjør det, og

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ vil divergere dersom $\int_a^\infty g(x)\,dx$ gjør det.





$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} < \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \qquad \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx \qquad \sqrt{x^3+x} > \sqrt{x} \qquad x \qquad \frac{1}{x}$$

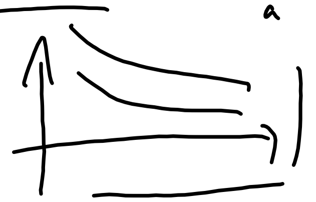
→ Konvergerer. $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ konvergerer.

grensesammenlikning.

La $f, g : [a, \infty)$ positive og kontinuerlige funksjoner.

Dersom $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ eksisterer og

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, da konvergerer også $\int_a^\infty g(x)\,dx$.



Bevis: Hvis $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ eksisterer, så er $f(x) < C \cdot g(x)$ for hver x der C er en konstant.

$\frac{f}{g}$ er kontinuerlig og derfor begrenset på hvert lukket intervall.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ eksisterer, så $\frac{f}{g}$ er begrenset på hele $[a, \infty)$.

$$f < C \cdot g,$$

og

$$g < C' f.$$

$$\underset{\text{konv}}{\int_a^\infty g\,dx} < \int_a^\infty C' f\,dx = C' \underset{\text{konv.}}{\int_a^\infty f\,dx}$$

$$\Longleftarrow$$