Omvendte funksjoner

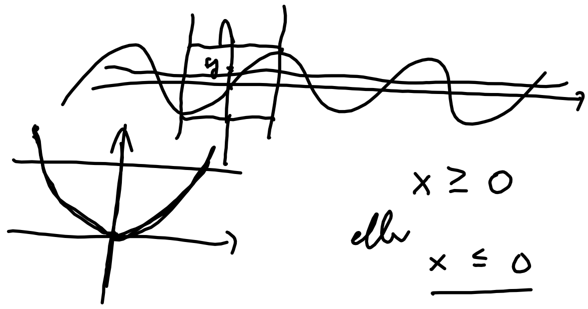
$\underline{y = \sin x}$ gitt y, hva er x?

for $y = \frac{1}{2}$ hva er x?

$\cancel{\frac{\pi}{4}}$ $x = \underline{\frac{\pi}{6}}$ $\quad x = \underline{\frac{5\pi}{6}}$ $+ 2k\pi$ $\quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$

$\underline{y = x^2}$ $\quad x = \pm\sqrt{y}$

$y = \sin x$



$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\underline{-1 \le y \le 1}$

$y = x^2$

$x \ge 0$

eller $\underline{x \le 0}$ $\quad \underline{y \ge 0}$

$\underline{f : A \to B}$ $\quad A, B \subseteq \mathbb{R}$

$A = D_f$ definisjonsområdet til f

$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \} \subseteq B$ verdimengden til f

Hvis x_1, x_2 er vilkårlige forskjellige tall i D_f så vil vi gjerne at $f(x_1)$ og $f(x_2)$ er forskjellige. (da vil $\underline{y = f(x)}$ ha <u>entydig løsning</u> for hver $y \in V_f$).

Def: I så fall sier vi at $\underline{f}$ er <u>injektiv</u>.

Def: Anta at $f : D_f \to V_f$ er <u>injektiv</u>
Da kalles funksjonen $g : V_f \to D_f$ s.a.

$g(y) = x$ dersom $y = f(x)$

for den <u>omvendte funksjonen</u> til f

Legg merke til at

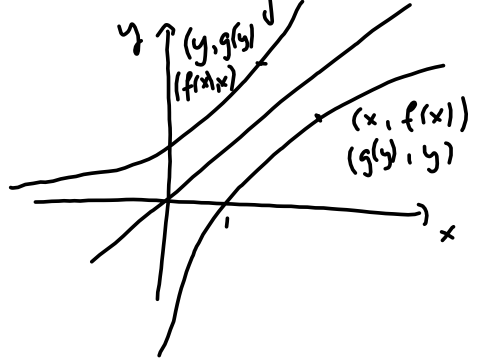
$$g(f(x)) = x \qquad g(y) = x$$

$$f(g(y)) = y$$

" $f(x) = y$.

eks

$y = \ln x = f(x) \qquad x = g(y) = e^y$



$y = \ln x \qquad e^{\ln x} = x$

$e^y = e^{\ln x} = x$

$D_f = (0, \infty) \quad V_f = \mathbb{R}$

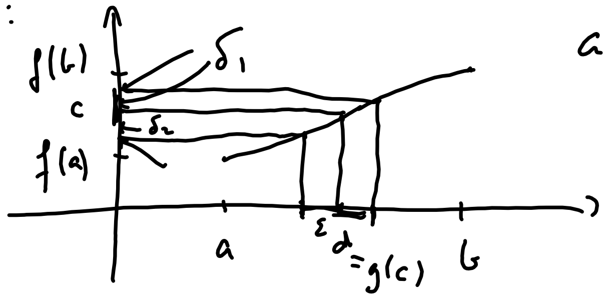
$V_f = D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = V_g = (0, \infty)$

Setning: Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ og strengt voksende, så er f injektiv og den omvendte funksjonen

$g : [f(a), f(b)] \to [a, b]$

er også strengt voksende og kontinuerlig!

skisse av bevis:



Gitt $\varepsilon > 0$ fin $\delta > 0$

s.a. . . .

Velger $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Hva om f er injektiv og deriverbar (på (a,b))?

Hva er da g', der g er den omvendte funksjonen til f?

La $c \in (a,b)$ og la $d = f(c)$ $\big(c = g(d)\big)$

Hva er $g'(d)$?

Hva er $\lim\limits_{y \to d} \dfrac{g(y) - g(d)}{y - d}$? (om den fins!)

skriver $y = d + \Delta y$ $\quad (\Delta y = y - d)$ $\quad y = f(x),\ d = f(c)$

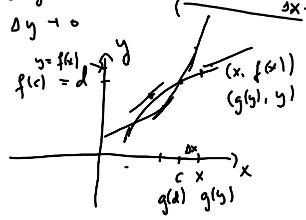
$g(y) = c + \Delta x \quad g(d) = c \quad (\Delta x = g(y) - c)$

$$\lim_{y \to d} \frac{g(y) - g(d)}{y - d} = \lim_{y \to d} \frac{\Delta x}{f(x) - f(c)} = \lim_{y \to d} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$y \to d$ hvis og bare hvis $\Delta y \to 0$

$$\lim_{y \to d} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \stackrel{?}{=}$$

$\Delta x \to 0$ hvis $\Delta y \to 0$



$x \to c$ hvis og bare hvis $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(c)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow[x \to c]{} f'(c)$$

Setning

så: $\quad g'(d) = \dfrac{1}{f'(c)}$!

Eks1: $\quad y = f(x) = \ln x \qquad x = g(y) = e^y$

$$e^y = x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{(\ln x)'} = \frac{1}{f'(x)} = g'(y) = e^y$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Eks2: $\quad f(x) = x e^{x^2} + 1 \qquad D_f = \mathbb{R} \quad V_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = (1 + 2x^2) e^{x^2} > 0$$

f er strengt voksende

så f har en omvendt funksjon $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = x e^{x^2} + 1$

$x = g(y)$

$y = 1 \Rightarrow 1 = x e^{x^2} + 1$

$x e^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$g'(1) \stackrel{?}{=} \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{(1 + 2 \cdot 0^2) e^0} = 1$$

Den omvendte funksjonen til $f: D_f \to V_f$ skriver vi ofte som $f^{-1}: V_f \to D_f$.

$\cancel{f^{-1} = \dfrac{1}{f}}$

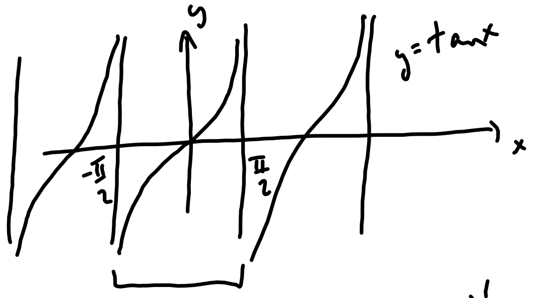
$f^{-1}(f(x)) = x$

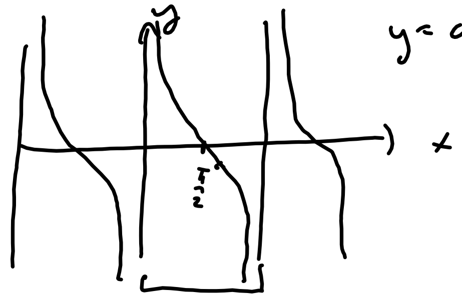
$f(f^{-1}(y)) = y$

Inverse funksjoner (omvendte funksjoner) til trigonometriske funksjoner.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k = 0, \pm 1, \pm 2 ..$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $x \neq 0 + k\pi$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, --$





$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \underline{1 + \tan^2 x}$

$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= -\frac{1}{\sin^2 x} = \underline{-1 - \cot^2 x}$

$\tan x$ er injektiv på $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $V_{\tan x} = \mathbb{R}$

$\cot x$ injectiv på $(0, \pi)$ $V_{\cot x} = \mathbb{R}$

$\operatorname{Arctan} x = \tan^{-1}(x)$ $\operatorname{Arccot} x = \cot^{-1}(x)$

$\operatorname{Arctan} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{Arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$\underline{(\operatorname{Arctan} x)'} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + x^2}}}$

$\boxed{\begin{aligned} x &= \tan y \\ y &= \operatorname{Arctan} x \end{aligned}}$

$= \frac{1}{1 + (\tan(\operatorname{Arctan} x))^2}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{1 + x^2}}}$

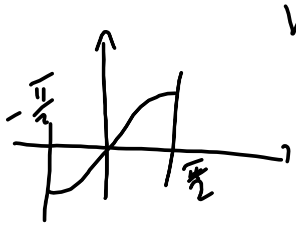
$\underline{(\operatorname{Arccot} x)'} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-1 - \cot^2 y} = \underline{\underline{\frac{1}{-1 - x^2}}}$

$y = \operatorname{Arccot} x$ $x = \cot y$

$y = \sin x$

er injektiv på $[-\pi/2, \pi/2]$

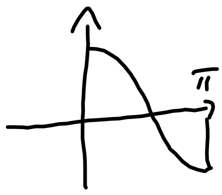
$V_{\sin x} = [-1,1]$



$y = \cos x$

er injektiv på $[0, \pi]$

$V_{\cos x} = [-1,1]$



$$\text{Arcsin}\, x = \sin^{-1} x : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Arccos}\, x = \cos^{-1} x : [-1,1] \to [0, \pi]$$

$$(\text{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

$y = \text{Arcsin}\, x \quad x = \sin y$

$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

$x = \cos y$