Uegentlige integraler

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ begrenset (ofte kontinuerlig)

$\rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,dx$ er definert.

Hva om vi har f definert på $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty)$, (a,b)...?

Tilfelle 1. La $f:(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Da sier vi at $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer dersom $\lim_{y\to a^+} \int_y^b f(x)\,dx$ eksisterer. I så fall definerer vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to a^+} \int_y^b f(x)\,dx.$$

Eksempel 1. Avgjør om det uegentlige integralet $\int_1^e \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ konvergerer eller divergerer. Hvis det konvergerer, finn verdien.

$f:(1,e] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$.

La $1 < y \leq e$. $\int_y^e \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int_{\ln(y)}^1 \frac{1}{u}\,du = \ln|u| \Big|_{\ln(y)}^1$

$u = \ln(x)$

$u' = \frac{1}{x}$

$x = y \rightarrow u = \ln(y)$

$x = e \rightarrow u = 1$

$= \ln(1) - \ln(\ln(y))$

$= -\ln(\ln(y))$

Ser på $\lim_{y\to 1^+} \int_y^e \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{y\to 1^+} \left(-\ln(\ln(y))\right)$

$$= -\ln\Big(\underbrace{\lim_{y\to 1^+} \ln(y)}_{0}\Big) = \infty.$$

Eksempel 2

Tilfelle 2: La $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Dersom $\lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx$ eksisterer, så sier vi at $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, og vi definerer

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx.$$

Eksempel 2 Avgjør om $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$ konverger. Finn verdien dersom det konvergerer.

La $y \geq 2$. Ser på

$$\int_2^y \frac{1}{x^2+x-2}\,dx.$$

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + (2A-B)$$

$$\Rightarrow \quad A+B=0$$
$$2A-B=1 \qquad 2A+A=3A=1 \to A=\tfrac{1}{3} \quad B=-\tfrac{1}{3}.$$

$$\int_2^y \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \int_2^y \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^y \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int_2^y \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1|\Big|_2^y - \frac{1}{3}\ln|x+2|\Big|_2^y$$

$$= \frac{1}{3}\ln|y-1| - \frac{1}{3}\ln|2-1| - \frac{1}{3}\ln|y+2| + \frac{1}{3}\ln 4$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right| + \frac{1}{3}\ln 4$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{y-1}{y+2}\right) + \frac{1}{3}\ln 4\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y+2}\right)\right) + \frac{1}{3}\ln 4$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1) + \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln 4.$$

Konklusjon: $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$ konvergerer, og har verdien $\frac{1}{3}\ln 4$.

Eksempel 3 Finn verdien til $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ dersom det konvergerer.

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x)$.

La $0<y\le 1$.

$$\int_y^1 \underset{u'}{x}\underset{v}{\ln(x)}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x)\Big|_y^1 - \int_y^1 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{u=\frac{1}{2}x^2 \quad v'=\frac{1}{x}} \quad = \frac{1}{2}1^2\ln(1) - \frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{4}x^2\Big|_y^1$$

$$= -\frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{4}1^2 + \frac{1}{4}y^2.$$

$$\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 x\ln(x) = \lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y^2\right)$$

$$= +\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(y)}{-1/y^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{1/y}{2/y^3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{y\to 0^+} y^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Konklusjon: $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ konvergerer, og har verdi $-\frac{1}{4}$.

Sammenligningstest

La $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$ være kontinuerlige funksjoner, positive, og $f(x)\ge g(x)$ for alle $x\in(a,b]$.

(i) Hvis $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer, så vil også $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergere.

(ii) Hvis $\int_a^b g(x)\,dx$ divergerer, så vil også $\int_a^b f(x)\,dx$ divergere.

Eksempel 4 Avgjør om $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ konvergerer eller divergerer.

Fra forelesning: p-test

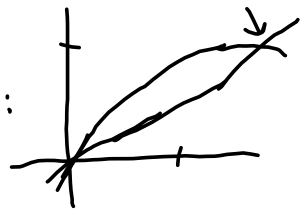
$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer $\iff p < 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer $\iff p > 1$

Idé: Sammenligne $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ med $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ulikhet: For $x \in (0, \pi/3)$ så gjelder $\sin(x) \geq \frac{1}{2}x$.

Bevis for ulikhet: La $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$. Definer $f(t) = \sin(t)$, $f: [0,x] \to \mathbb{R}$. Middelverdisetning:



$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \quad \text{for en } c \in (0,x).$$

$$\frac{\sin x}{x} = f'(c) = \cos(c) \geq \frac{1}{2} \qquad \underline{0 < c < x \leq \frac{\pi}{3}}. \quad \cos(c) \geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}x. \rightsquigarrow \sqrt{\sin x} \geq \sqrt{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x}$

$\rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \leq \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ for $x \in (0, \frac{\pi}{3}]$.

Ved p-testen vil $\sqrt{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergere. Dermed vil $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ også konvergere, ved sammenligningstesten.

Merk: $\int_y^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ lar seg ikke regne ut direkte.

Grensesammenligningstesten

La $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ være to kontinuerlige.

(i) Hvis $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer og

$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty$, så vil $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergere.

(ii) Hvis $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergerer, og

$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0$, så vil $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergere.

Eksempel 5 Avgjør om $\int_1^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$ konvergerer eller divergerer.

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^5}} = x^{1-\frac{5}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{3/2}} \; ; \; p = \frac{3}{2} > 1$$

$$g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}} . \qquad f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{\frac{x^3+x^5}{x^3}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1}} = \frac{1+0}{\sqrt{0+1}} = 1 < \infty .$$

Ved grensesammenligningstesten vil også $\int_1^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$ konvergere.

Eksempel 6 Avgjør om $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ konvergerer.

Sett $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Ved p-testen vil $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergere.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-e^{-x})/x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} (1-e^{-x}) = 1-0 = 1 > 0$$

Ved grensesammenligningstesten vil $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ divergere.