Integrasjon

$1+(-1)=0 \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad\quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -4$

$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad\quad 1 \quad 2 \quad 3$

$y = f(x) \quad\quad x = g(y)$

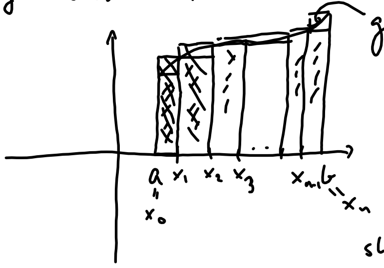
$\boxed{g \circ f = id} \quad y = \ln x \quad\quad x = e^y$

$g(f(x)) = x \quad\quad f(g(y)) = y$

$\boxed{\int f' \, dx = f + C} \quad f \rightsquigarrow f' \quad\quad f \rightsquigarrow \int f \, dx$

"integralet" til en funksjon kalles den antideriverte.

La f være en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$.



En partisjon av $[a,b]$ er en endelig mengde $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ slik at $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

$N(\Pi)$ = summen av arealene til rektanglene under grafen.

$\emptyset(\Pi)$ = summen av arealene til rektanglene over grafen.

$N(\Pi) \le \emptyset(\Pi)$

$$\sup_{\Pi} N(\Pi) \le \inf_{\Pi} \emptyset(\Pi)$$

$$\sup \{ N(\Pi) \mid \Pi \text{ er en partisjon av } [a,b] \}$$

Når f er kontinuerlig så er faktisk

$$\sup_{\Pi} N(\Pi) = \inf \emptyset(\Pi). \quad (= \text{arealet under grafen}).$$

Def: Dersom f er begrenset på $[a,b]$ så finnes $N(\Pi)$ og $\emptyset(\Pi)$ for hver partisjon av $[a,b]$

og $$\inf_{\Pi} \emptyset(\Pi) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$\sup_{\Pi} N(\Pi) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Dersom disse to er like, sier vi at f er integrerbar på $[a,b]$ og skriver

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Vil definer $\emptyset(\pi)$ og $N(\pi)$ litt mer presist.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon.

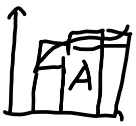
$\pi = \{x_0, x_1 \, .. \, x_n\}$ er en partisjon av $[a,b]$

La $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $\qquad m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

$$N(\pi) = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + m_2 (x_2 - x_1) + \; + m_n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$N(\pi) < \emptyset(\pi)$

$$\emptyset(\pi) = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) + \; + M_n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$



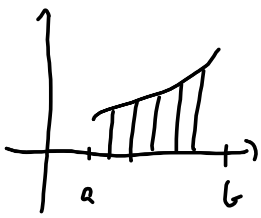
$A \leq \emptyset(\pi)$

$N(\pi) \leq A$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\pi} \emptyset(\pi) \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\pi} N(\pi)$$

Eksempel. La f være monotont voksende på $[a,b]$

$\boxed{f \text{ begrenset på } [a,b] \iff \text{det finnes } M > 0 \text{ s.a } |f(x)| < M \text{ for alle } x \in [a,b].}$



La π_n være partisjonen som deler $[a,b]$ i n like store deler.

$\pi_n = \{x_0, x_1, \, .. \, x_n\}$ $\qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

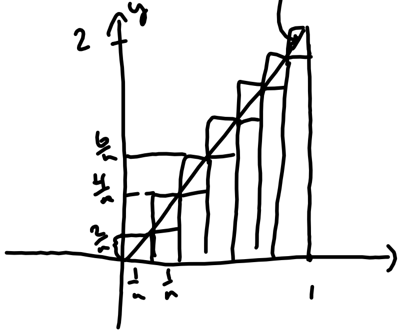
$$\emptyset(\pi_n) = f(x_1) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) + f(x_2)\left(\frac{b-a}{n}\right) + \; + f(\underset{b}{x_n})\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$N(\pi_n) = f(\underset{a}{x_0})\left(\frac{b-a}{n}\right) + f(x_1)\left(\frac{b-a}{n}\right) + \; + f(x_{n-1})\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\emptyset(\pi_n) - N(\pi_n) = f(x_n)\left(\frac{b-a}{n}\right) - f(x_0)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \big(f(b) - f(a)\big)\frac{(b-a)}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow f$ integrerbar $\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

Eksempel $y = f(x) = 2x$



$\Pi_n : \{0 = x_0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}, 1\}$

er en partisjon av $[0,1]$.

$$\phi(\Pi_n) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \frac{6}{n} + \quad + \frac{2(n-1)}{n} + \frac{2n}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2}(1 + 2 + \quad + n) = \underline{\frac{2}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$N(\Pi_n) = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \quad + \frac{2(n-1)}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2}(1 + 2 + \quad + n-1)$$

$$= \underline{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = \underline{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\cdot n}{n^2} = \underline{\underline{1}}$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} N(\Pi_n) \le \sup_{\Pi} N(\Pi) \le \inf_{\Pi} \phi(\Pi) \le \lim_{n\to\infty} \phi(\Pi_n) = 1$$

$$= \underline{\int_0^1} 2x\,dx \quad = \quad \overline{\int_0^1} 2x\,dx \quad =$$

f er deriverbar og $\underline{\int_0^1 2x\,dx} = \underline{\underline{1}}$

Analysens fundamentalsetning

Def: Dersom F er en funksjon på $[a,b]$ og $F'(x) = f(x)$ for hver $x \in (a,b)$ sier vi at F er en antiderivert til f.

Lemma: Dersom F og G er antideriverte til f så er $F = G + C$, der C er en konstant (i $\mathbb{R}$).

Bevis: $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$

da er $F - G = C \quad C \in \mathbb{R}$. $\square$

Setning: Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, da er f integrerbar på $[a,x]$ for hver $x \in [a,b]$

og $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert til $f(x)$. $(F'(x) = f(x))$

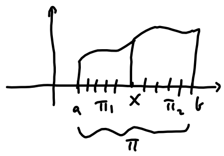
Bevis (skisse).

Lemma: For hver $x \in (a,b)$ så er

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt + \overline{\int_x^b} f(t)\,dt .$$

$$\phi(\pi) = \phi(\pi_1) + \phi(\pi_2)$$

Bevis:



$+ \ (\varepsilon \text{ argument}) \quad \square.$

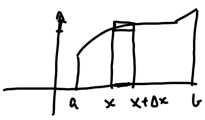
$$G(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt$$

vil vise at $G'(x) = f(x)$.

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{\int_a^{x+\Delta x}} f(t)\,dt - \overline{\int_a^x} f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{\int_a^x} f(t)\,dt + \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt - \overline{\int_a^x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt$$



La $m_{\Delta x} = \inf_{t \in [x, x+\Delta x]} f(t) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$

$M_{\Delta x} = \sup_{t \in [x, x+\Delta x]} f(t) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)$

$$m_{\Delta x} \Delta x \le \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt \le M_{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$m_{\Delta x} \le \frac{1}{\Delta x} \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt \le M_{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0 \qquad f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt = f(x)$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| $

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad G'(x)$

med nedre integral får vi samme utregning: $H(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$.

$$\Rightarrow \underline{\int_a^x} f(t)\,dt = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

og $\underline{F'(x)} = H'(x) = G'(x) = \underline{f(x)}$

G, H er antideriverte og $G(a) = H(a) = \underline{0}$ $\square$