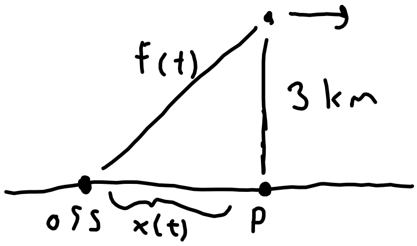
Koblede hastigheter

Oppgave 1 Fly flyr fra oss 3000 m over bakken, med en hastighet på 800 km/t. Hvor fort øker distansen mellom oss og flyet når flyet er over et punkt på bakken 4 km fra oss?



Løsning: Pythagoras:

$$f(t)^2 = x(t)^2 + 3^2$$

Deriverer på hver side:

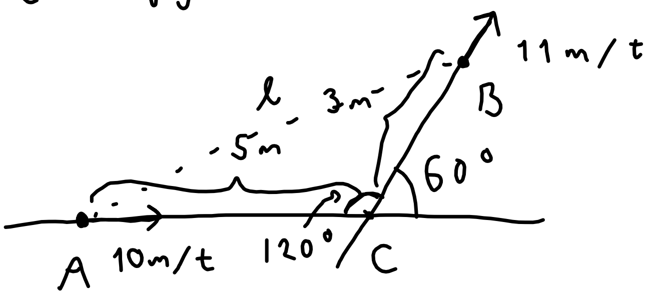
$$2f(t)f'(t) = 2x(t)x'(t) \quad (*)$$

Når $x(t) = 4$, så er $f(t)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Dermed er $f(t) = 5$. Setter inn i (*) og får

$$2 \cdot 5 \cdot f'(t) = 2 \cdot 4 \cdot 800$$

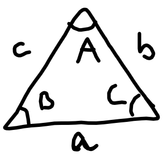
Dette gir oss $f'(t) = 640$ km/t.

Oppgave 2. (opg 15 i boka). To skip, A og B;



a) Finn avstanden fra A til B.

Cosinussetningen:

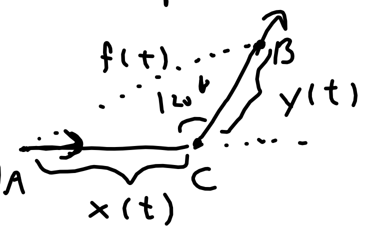


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

I vårt tilfelle:

$$l^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(120°) = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 34 + 15 = 49.$$ Derfor er $l = 7$.

b) Hvor fort endrer avstanden mellom skipene seg?



LØSNING: Igjen, ved Cosinussetningen:

$$f(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 - 2x(t)y(t)\cos(120°)$$
$$= x(t)^2 + y(t)^2 + x(t)y(t)$$

Vi deriverer på begge sider:

$$2f(t)f'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + x'(t)y(t) + x(t)y'(t).$$

Ved tiden $t=0$ får vi:

$$2\cdot 7\cdot f'(0) = 2\cdot 5(-10) + 2\cdot 3\cdot 11 + (-10)\cdot 3 + 5\cdot 11$$
$$= -9.$$

Dermed er $f'(0) = -\frac{9}{14}$ m/t.

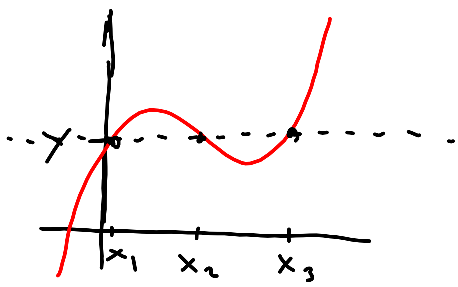
Omvendte funksjoner

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$

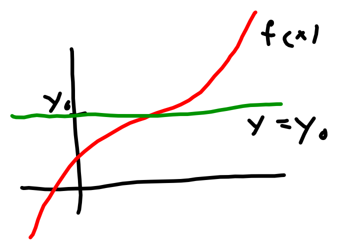
$$V_f = \{ f(x) : x \in D_f \} \subseteq \mathbb{R}$$

En injektiv funksjon f: Hvis $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D_f$, så må $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ekvivalent: For alle $y \in V_f$, så fins nøyaktig én $x \in D_f$ slik at $f(x) = y$.

Graf til høyre: Ikke injektiv! siden f.eks. $f(x_1) = f(x_2)$ men $x_1 \neq x_2$.



Denne er injektiv: For enhver $y_0 \in V_f$, så skjærer linja $y = y_0$ grafen til f nøyaktig én gang.



Strengt monotone funksjoner er injektive.

Hvis $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ er injektiv, så defineres den omvendte funksjonen $f^{-1}: V_f \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

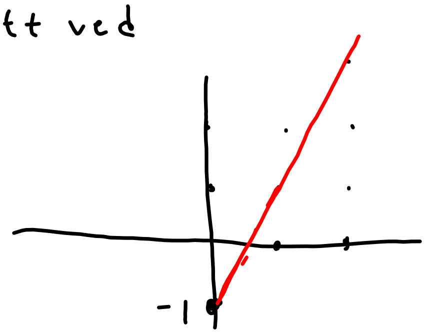
$$f^{-1}(y) = x \quad \text{når} \quad f(x) = y \quad ; \quad y \in V_f .$$

Kan også skrive $f: D_f \longrightarrow V_f$, i så fall $f^{-1}: V_f \longrightarrow D_f$. $D_{f^{-1}} = V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f$.

TEOREM Hvis f er kontinuerlig, strengt monoton og deriverbar i $x \in D_f$ med $f'(x) \neq 0$, så er f^{-1} deriverbar i punktet $y = f(x)$, og

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Eksempel 1 La $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = 2x - 1$.



La $y \in \mathbb{R}$. Anta $f(x) = y$ for et tall $x \in \mathbb{R}$.

$$2x - 1 = y$$
$$2x = y + 1$$
$$x = \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{2} .$$

Så $V_f = \mathbb{R}$, og f er injektiv. Omvendte funksjonen er gitt ved

$$f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{2} .$$

La oss regne ut $(f^{-1})'(3)$. $y = 3$, $x = 2$. $f(x) = y$.

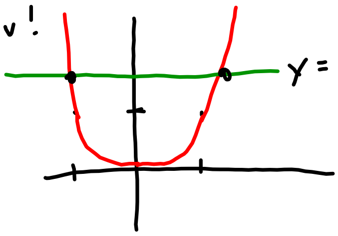
Teoremet sier at

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2} .$$

Eksempel 2. La $g(x) = \frac{1}{x}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Anta $g(x) = y$, altså $\frac{1}{x} = y$.
Får $xy = 1$. Hvis $y \neq 0$, så er $x = \frac{1}{y}$.
Hvis $y = 0$ så har $\frac{1}{x} = y$ ingen løsning. Dermed er
$V_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. g er injektiv, og den omvendte funksjonen
er $g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.
Så g er sin egen omvendte funksjon.

Eksempel 3 La $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved
$h(x) = x^4$. $V_h = [0, \infty)$ siden $h(x) \geq 0$. Hvis
$y \in V_h$, dvs. $y \geq 0$, og $y = h(x) = x^4$, så er enten
$x = \sqrt[4]{y}$ eller $x = -\sqrt[4]{y}$. h er ikke injektiv!

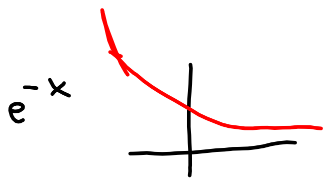


Definer i stedet $D_{\tilde{h}} = [0, \infty)$. Da er $\tilde{h}$
injektiv ($\tilde{h}(x) = h(x)$), og
$$\tilde{h}^{-1}(y) = \sqrt[4]{y}.$$

Eksempel 4 La $k(x) = (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$. $D_k = \mathbb{R}$.

Finn V_k: $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 4x + 5) = \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$$



Derfor vil
$$\lim_{x \to -\infty} k(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 + 4x + 5)e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 4}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

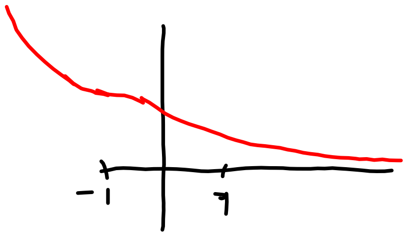
$$k(x) = (x^2+4x+5)e^{-x} = (\underbrace{\underbrace{(x+2)^2}_{\geq 0}+1}_{\geq 1})\underbrace{e^{-x}}_{>0} > 0$$

Vi deriverer k:

$$k'(x) = (2x+4)e^{-x} + (x^2+4x+5)(-e^{-x})$$
$$= (-x^2-2x-1)e^{-x} = -\underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0}\underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

Ser at $k'(x) \leq 0$, og $k'(x) = 0$ hvis og bare hvis $x=-1$, ellers er $k'(x)<0$.

På "intervallet" $(-\infty,-1)$ og $(-1,\infty)$ så er k strengt synkende, dermed er k injektiv.



$V_k = (0,\infty)$. Vi har en omvendt funksjon $k^{-1}: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $V_{k^{-1}} = \mathbb{R}$.

$$(k^{-1})'(5) = \frac{1}{k'(0)} = -1$$