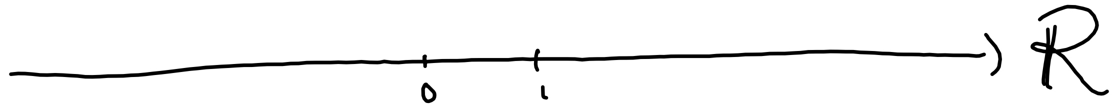
Kompletthet og følger



Kompletthet → ingen hull

$A \subseteq \mathbb{R}$ delmengde

Eks: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$1, 2, \ldots \quad \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \ldots \quad \pi, \sqrt{2}$

Dersom tallet b er større enn eller lik alle tallene i A, så sier vi at b er en <u>øvre skranke</u> for A og at A er <u>oppad begrenset</u>.

$A = (1, 15]$

Dersom tallet b er mindre enn eller lik alle tallene i A, så sier vi at b er en <u>nedre skranke</u> for A og at A er <u>nedad begrenset</u>.

Hvis A er oppad og nedad begrenset sier vi bare at A er begrenset.

Eks: $A = (1, 15]$

$b = 16$ er en øvre skranke
$b = 15$ — , —

$b = 0.5$ er en nedre skranke
$b = -10$ — , —
$b = -\pi$ — , —

Def. La $A \subseteq \mathbb{R}$ være en oppad begrenset mengde. Dersom b er en øvre skranke som er mindre eller lik alle andre øvre skranker for A, kaller vi b en minste øvre skranke eller <u>supremum</u> for A. $\underline{b = \sup A}$

Def: Tilsvarende kalles en største nedre skranke for infimum for A dersom A er nedad begrenset. $\underline{b = \inf A}$

<u>Eks</u> $A = (1, 15]$

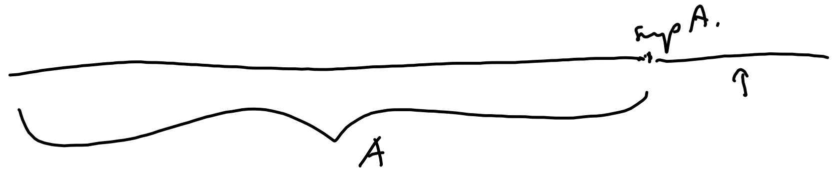
$\sup A \overset{?}{=} 15$!

$\inf A \overset{?}{=} \underline{1}$

<u>Kompletthetsaksiom:</u>

Hver oppad begrenset delmengde av reelle tall har et supremum.

Hver nedad begrenset delmengde av reelle tall har et infimum.



$A = (1, 15)$ ←

$\sup A = 15$

$A = \{ a \in \mathbb{R} \mid a^2 < 2 \}$

-2 er nedre skranke, 222 er øvre skranke

$\sup A = \sqrt{2}$ $\quad \sup A \notin A$

$\inf A = -\sqrt{2}$ $\quad \inf A \notin A$

$A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \}$

$\sup A = \sqrt{2}$

$\inf A = -\sqrt{2}$

Følger

Def En uendelig sekvens av tall

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

kalles en (tall)følge.

Alternativt: En følge er en funksjon

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$
$$f: n \longmapsto f(n)$$

eks:

div $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ $\quad a_n = n$

konvergerer

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$

div

$1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1 \ldots$

$1, 3, 7, 11, 2, 4, 35,$

$1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{3}, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$

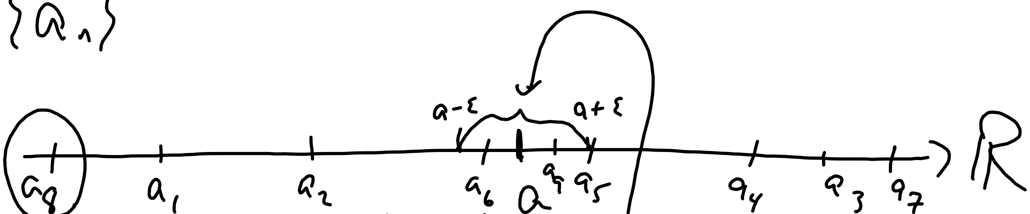
$a_n = 1 \quad n > 100$

Def: En følge $\{a_n\}$ konvergerer mot tallet a dersom det for hver $\varepsilon > 0$ fins en N slik at når $n > N$ så er $|a_n - a| < \varepsilon$.

Vi sier at følgen konvergerer (om den har en slik grense a) og skriver

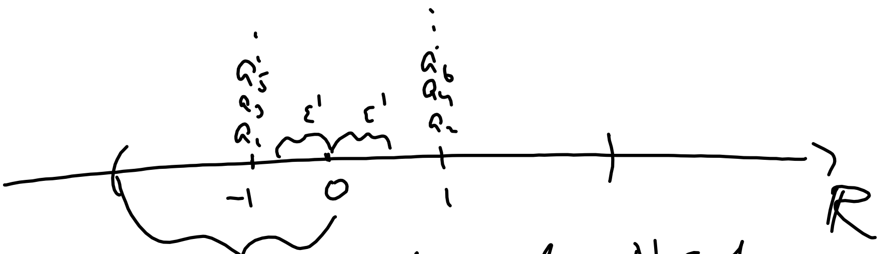
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

$\{a_n\}$



$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ det fins en N slik at når $n > N$ så er a_n ($|a_n - a| < \varepsilon$).
(i vårt tilfelle er $N > 8$)

eks $a_n: -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$



for ε kan velge $N = 1$
for ε' fins ingen N !

$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

velge $\varepsilon = \frac{1}{N}$ da kan vi velge N for

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$$

For hver $\varepsilon > 0$ fins det en N s.a $\frac{1}{N} < \varepsilon$ $\quad (N > \frac{1}{\varepsilon})$

med denne N så vil $n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

så $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$! $\quad \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

regneregler:

Hvis $\{a_n\}$ konvergerer mot a

og $\{b_n\}$ — " — b

– så konvergerer $\{a_n + b_n\}$ mot $a+b$

– og $\{a_n \cdot b_n\}$ mot $a \cdot b$

$\{a_n\} = \{1 + \frac{1}{n}\}$ $\quad 1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \ldots$

$\{b_n\} = \{-1 + \frac{1}{n^2}\}$ $\quad -1+1,\ -1+\frac{1}{4},\ -1+\frac{1}{9},\ \ldots$

eks: $\{a_n + b_n\} = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\}$ $\quad 1+1,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9},\ \ldots$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0.$

$(a_n \cdot b_n) = (-1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3})$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -1 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$

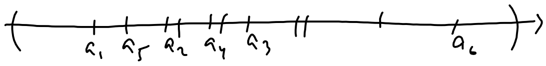
Def: Følgen $\{a_n\}$ er voksende dersom $a_n \leq a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Følgen $\{a_n\}$ er avtagende dersom $a_n \geq a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Følgen $\{a_n\}$ er monoton dersom den er voksende eller avtagende.

Setning: En monoton og begrenset følge konvergerer.

(en følge er begrenset dersom mengden av tall i følgen er begrenset).



Bevis for setning:

Anta at $\{a_n\}$ er voksende.

Siden følgen er begrenset så fins det et tall b som er en øvre skranke, det vil si $b \geq a_n$ for hver n.

Kompletthetsaksiomet sier at $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ har et supremum $a = \sup A$.

Da er $a \geq a_n$ for hver n, (og $a \leq b$).

vil vise at $\{a_n\}$ konvergerer mot a.

La $\varepsilon > 0$, vil finne N s.a $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

men $a - \varepsilon < a$, siden $a = \sup A$ så er ikke $a - \varepsilon$ en øvre skranke for A

så det fins en N slik at $a_N > a - \varepsilon$

men $n > N \Rightarrow a_n > a_N$ (siden $\{a_n\}$ vokser)

og $a_n \leq a$ siden $a = \sup A$, så

$a - \varepsilon < a_N < a_n \leq a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$!

så $\{a_n\}$ konvergerer pr. def mot a □

$\{a_n\}$ avtagende går på samme måte.

eks. $1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3},\ 1 - \frac{1}{4} \ldots \rightarrow 1$

---

eks: $a_n:\ 1, 2, 3, 4, \ldots$

divergerer mot ∞. og skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

generelt når det for hver $c > 0$ fins en N slik at $n > N \Rightarrow |a_n| > c$.