Mer om konvergens av følger

Def (4.3.1) En følge $\{a_n\}$ konvergerer mot a hvis for enhver $\varepsilon > 0$, så fins en N slik at når $n \geq N$, så er $|a_n - a| < \varepsilon$

Vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Regneregler: La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være følger slik at* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

* de konvergerer

Da er

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ hvis $B \neq 0$

Eksempel La $a_n = \frac{n+1}{n^2}$. Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Kanskje regel 4? Nei

$\lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

$a_n = \frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

Eksempel ($\approx$ 4.3.5) La $a_n = \frac{2+4n^2}{1+n+n^2}$. Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

„Triks": Del på n^2 både oppe og nede.

$$a_n = \frac{2+4n^2}{1+n+n^2} = \frac{(2+4n^2)/n^2}{(1+n+n^2)/n^2} = \frac{2/n^2 + 4}{1/n^2 + 1/n + 1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} (2/n^2 + 4) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 4 = 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} (1/n^2 + 1/n + 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 1/n + \lim_{n\to\infty} 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\lim a_n = \lim \frac{2/n^2 + 4}{1/n^2 + 1/n + 1} = \frac{\lim (2/n^2 + 4)}{\lim (1/n^2 + 1/n + 1)} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$$

<u>Eksempel</u> ($\approx$ 4.3.8) La $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ $\infty - \infty$??? NEI

$a_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \approx 0.4$ $a_{100} = \sqrt{101} - \sqrt{100} \approx 0.05$ $a_{10000} \approx 0.005$

„Triks": Konjugatsetningen sier $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2) = (n+1) - n = 1$$

Del med $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty$ $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = \infty$

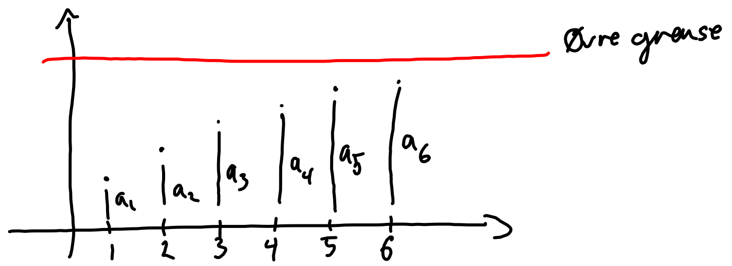
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \underline{\underline{0}}$$

(se oppg 7.3.12)

Teorem 4.3.9. Hvis følgen $\{a_n\}$ er voksende og begrenset, så er den konvergent (det finnes en A slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = A$)

Voksende: $a_{n+1} > a_n$ for alle n

Begrenset: Det fins en $c \in \mathbb{R}$ slik at $|a_n| < c$ for alle n.



Eksempel ($\approx$ 4.3.10) La a_n være definert av

- $a_1 = 0$
- for $n \geq 1$, $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} a_n\right) + 1$

a) Vis at $0 \leq a_n \leq 2$ for alle n

b) Vis at a_n er voksende (dermed er a_n begrenset)

c) Vis at a_n konvergerer og finn grensen

a) Bruk induksjon. Sjekk for $n=1$

$a_1 = 0$, så $0 \leq a_1 \leq 2$

Anta $0 \leq a_n \leq 2$

Vil vise $0 \leq a_{n+1}$

$\Updownarrow$

$0 \leq \left(\frac{1}{2} a_n\right) + 1$

$\Updownarrow$

$-1 \leq \frac{1}{2} a_n \Leftrightarrow -2 \leq a_n$

Vi vet $0 \leq a_n$

$\Downarrow$

$-2 \leq 0 \leq a_n$

$\Downarrow$ $-2 \leq a_n$

Anta $a_n \leq 2$, vil ha $a_{n+1} \leq 2$

$$\Updownarrow$$
$$\left(\frac{1}{2}a_n\right)+1 \leq 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{2}a_n \leq 1$$
$$\Updownarrow$$

$a_n \leq 2$, som stemmer.

Så $0 \leq a_n \leq 2$ for alle n, ved induksjon.

b) $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}a_n\right)+1$

Vil vise at $a_{n+1} \geq a_n$

$$\Updownarrow$$
$$\left(\frac{1}{2}a_n\right)+1 \geq a_n$$
$$\Updownarrow$$
$$1 \geq a_n - \frac{1}{2}a_n$$
$$\Updownarrow$$
$$1 \geq \frac{1}{2}a_n$$
$$\Updownarrow$$

$2 \geq a_n$, og dette stemmer, ved a)

c) Teorem 4.3.9. sier at siden a_n er voksende og begrenset, så finnes $\lim_{n\to\infty} a_n$ (a_n konvergerer)

Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$. La $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.

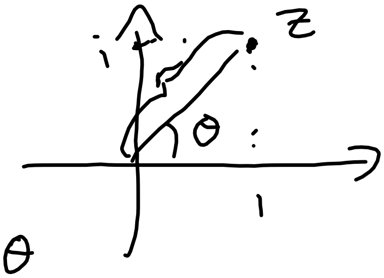
Vi har $A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}a_n\right)+1\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n\right) + \lim_{n\to\infty} 1$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n) + 1$$
$$= \frac{1}{2}A + 1$$

$$A = \frac{1}{2}A + 1 \iff \frac{1}{2}A = 1 \iff A = \underline{\underline{2}}.$$

Repetisjon fra komplekse tall

Oppgave La $z = 1 + i$.



Finn $z^{10} = (1+i)^{10}$.

Finner polarformen $z = re^{i\theta}$

Modulus $r = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \underline{\sqrt{2}}$

Argument θ, $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \dfrac{1}{1} = 1$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \tan^{-1}(1) = \underline{\dfrac{\pi}{4}}$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$z^{10} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \sqrt{2}^{10}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^5 e^{i\frac{10\pi}{4}}$

$= 32\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32\cdot(0+i)$

DeMoivres formel $= \underline{\underline{32i}}$

$\cos\dfrac{10\pi}{4} = \cos\dfrac{5\pi}{2} = \cos\left(2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

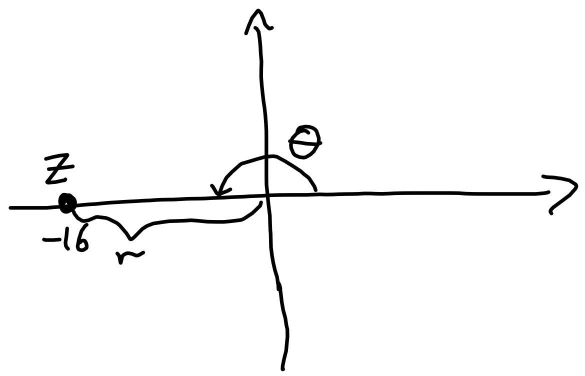
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$\sin\dfrac{10\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1.$

Oppgave La $z=-16$. Finn fjerderøttene til z, altså finn de w slik at $w^4 = z$.

Finner polarformen

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = \sqrt{16^2} = 16$$



$\theta = \pi$

$z = re^{i\theta} = 16e^{i\pi}$.

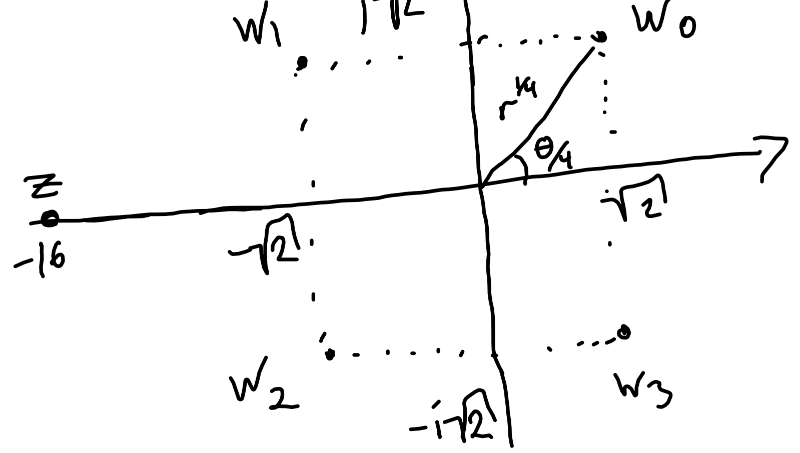
Setning 3.4.2 sier at z har 4 fjerderøtter w_0, w_1, w_2, w_3, hvor $w_k = r^{1/4} e^{i\left(\frac{\theta}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right)}$

$$w_0 = r^{1/4} e^{i\left(\frac{\theta}{4}+0\right)} = 16^{1/4} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$$

$$w_1 = r^{1/4} e^{i\left(\frac{\theta}{4} + 1\cdot\frac{2\pi}{4}\right)} = 16^{1/4} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 16^{1/4} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$w_2 = \ldots = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$w_3 = \ldots = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



Oppgave (Algebraens fundamentalteorem)

La $P(z) = z^4 + 16$.

Skriv $P(z)$ som et produkt av lineære funksjoner.

Alg. fundamentalteorem sier at

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)$$

hvor r_i er komplekse tall

r_i-ene er slik at $P(r_i) = 0$

For å finne r_i, må vi løse $P(z) = 0$

$$P(z) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$z^4 + 16 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$z^4 = -16$$
$$\Updownarrow$$

z er en fjerderot av -16

Så røttene $r_1, \ldots r_4$ er fjerderøttene w_0, w_1, w_2, w_3

$$P(z) = (z - w_0)(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)$$
$$= (z - (\sqrt{2} + i\sqrt{2}))(z - (-\sqrt{2} + i\sqrt{2}))(z - (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})(z - (\sqrt{2} - i\sqrt{2}))$$