Det ubestemte integralet og Riemannsummer.

Analysens fundamentalsetning:
La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon.
Da er f integrerbar på $[a,b]$, og på hvert intervall $[a,x]$ der $x \in [a,b]$.
Videre er funksjonen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

en antidert til f.

Korollar: Dersom $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $K(x)$ er en antiderivert til f

da er

$$\int_a^b f(t)\,dt = K(b) - K(a).$$

Bevis: Vet at $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert.
Så da er $K(x) - F(x) = C$ C konstant.

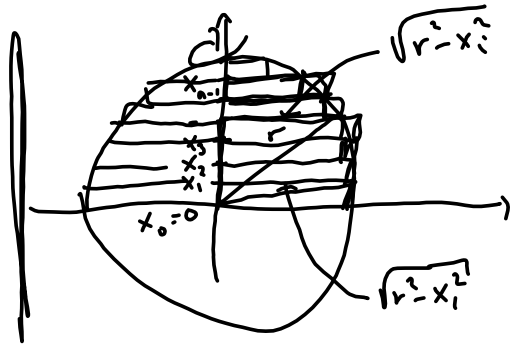
$F(x) = K(x) - C$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= K(b) - C - (K(a) - C)$$
$$= K(b) - K(a)$$

D.

Eks Finn formelen for volumet til ei kule med radius r.

Vi beregne volumet til en halvkule.



$\Pi_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ er en partisjon av $[0, r]$.

$$x_i - x_{i-1} = \frac{r}{n} = \Delta x$$

$$V_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \pi\left(\sqrt{r^2-x_i^2}\right)^2 \cdot \Delta x}_{\text{volum av en sylinder}}$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\sqrt{r^2-x_{i-1}^2}\right)^2 \Delta x$$

$$\underline{V_i} = \sum_{i=1}^{n} \pi(\underline{r^2-x_i^2})\,\underline{\Delta x} \qquad \underline{V_y} = \sum_{i=1}^{n} \pi\,\underline{(r^2-x_{i-1}^2)\,\Delta x}$$

$\underline{f(x) = \pi(r^2-x^2)}$

f er kontinuerlig på $[0, r]$.

$$V_i = N(\Pi_n) \leftarrow$$
$$V_y = \varnothing(\Pi_n) \leftarrow$$

så an. f. setning sier at:

$\int_0^r f(t)\,dt$ eksisterer og er lik $K(r) - K(0)$ for en antidert. $K(x)$ til $f(\underline{x})$.

(siden $\lim_{n\to\infty} V_i = \lim_{n\to\infty} V_y$)

$\underline{\text{Volumet til halvkula}} = \lim_{n\to\infty} V_i = \lim_{n\to\infty} V_y = K(r) - K(0)$

Velg $K(x) = \underline{\pi r^2 x - \frac{\pi}{3}x^3}$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \underline{\pi r^2} - \pi x^2 \\ K(x) &= \underline{\pi r^2 x - \tfrac{1}{3}\pi x^3} \end{aligned}}$$

$$= \int_0^r \underline{\pi(r^2-x^2)}\,dx = \pi r^2 r - \frac{\pi}{3}r^3 - \left(\pi r^2 \cdot 0 - \frac{\pi}{3}0^3\right) = \underline{\frac{2\pi}{3}r^3}$$

Så kula har volum $\underline{V = \frac{4\pi}{3}r^3}$

Det ubestemte integralet.

Def: Det ubestemte integralet

$\int f(x)\,dx$ er den generelle antideriverte til f, det vil si en spesiell antiderivert pluss en vilkårlig konstant.

(definisjon forutsetter at f (er integrerbar) har en antiderivert)

Derivasjonsreglene gir oss regneregler for det ubestemte integralet.

eks

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

VS: $f+g$ = HS: $f+g$

$$F' = f \qquad G' = g$$

$$F + C_1 + G + C_2$$

$$(F + C_1 + G + C_2)' \qquad C_i' = 0!$$

$$= \underline{F' + G'} = f + g$$

$\Rightarrow$ $F + C_1 + G + C_2$ er en antiderivert til $f+g$

så $\int f + g\,dx = \underline{F + G + C_1 + C_2}$

$c \in \mathbb{R}$

$$\int c\,f(x)\,dx \overset{\Uparrow}{=} c\int f(x)\,dx$$

deriverer begge sider: $\underline{c\,f(x) = c\,f(x)}$ ✓

Det ubestemte integralet

$$\int \underline{f(g(x))\,g'(x)}\,dx = \underline{F(g(x))} + C$$

der $F'(x) = f(x)$

$(\underline{F'(u)} = \underline{f(u)})$.

deriverer begge sider:

VS: $\underline{f(g(x)) \cdot g'(x)}$

HS: $F(g(x))'$ $\qquad u = g(x)$

$= F'(u) \cdot u'$

$= F'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= \underline{f(g(x)) \cdot g'(x)}$ ☐

elns.
$a \in \mathbb{R}$

$$\int a \, dx = ax + C$$

$$\int x^a \, dx = \underline{\frac{1}{a+1} x^{a+1}} + C \qquad \underline{a \neq -1}$$

$$\left(\frac{1}{a+1} x^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1) x^a = \underline{\underline{x^a}}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int 1+\tan^2 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{Arctan} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{Arc\,sin} x + C$$

$$\int \sin^3 x \, \underline{\underline{\cos x \, dx}} = \int \underset{u^3}{\sin^3 x} \cdot \underbrace{(\sin x)' \, dx}_{du}$$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\underline{u = \sin x}$$

$$(\sin x)' = \underline{\frac{du}{dx} = \cos x}$$

$$\underline{\underline{du = \cos x \, dx}}$$

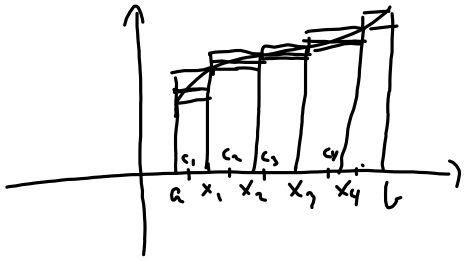
$$= \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \underline{\frac{1}{4} \sin^4 x + C}$$

kjerneregel

substitusjon.

Riemann summer



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset.

$\pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en partisjon av $[a,b]$

$\emptyset(\pi) = \sum M_i (x_i - x_{i-1})$

$N(\pi) = \sum m_i (x_i - x_{i-1})$

Darboux: $\int_a^b f(x)\,dx = \sup_\pi N(\pi) = \inf_\pi \emptyset(\pi)$ når de er like

Riemann: $U = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$R(\pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \leftarrow \text{Riemann sum.}$$

$$N(\pi) \le R(\pi, U) \le \emptyset(\pi)$$

$$\sup_\pi N(\pi) \qquad\qquad \inf_\pi \emptyset(\pi)$$

$$|\pi| = \max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) \quad = \text{maskevidden til } \pi.$$

partisjon

Dersom $\lim_{\substack{|\pi_n| \to 0 \\ n \to \infty}} R(\pi_n, U) = \alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

for hver følge av partisjoner (π_n) med maskevidde $|\pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$,

så sier vi at f er Riemann-integrerbar

(og skriver $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$)

med integral α.

Darboux og Riemann integral er det like! Bevist i boka