Algebraens fundamentalteorem (3.5.1)

La $P(z) = c_n z^n + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$

være et n'te-gradspolynom med komplekse koeffisienter c_i.

Da fins komplekse tall $r_1, \dots, r_n$ slik at

$$P(z) = c_n \cdot (z - r_1) \cdot (z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

Tallene $r_1, \dots, r_n$ kalles røttene til P. Bortsett fra rekkefølgen er de entydig bestemt. (Men de kan være like.)

Altså: Likningen $P(z) = 0$ har løsningene

$$z = r_1 \ , \quad z = r_2 \ , \ \dots \ , \quad z = r_n$$

Bevis for algebraens fundamentalteorem: Kalkulus kap. 5.5 (ikke pensum)

Eks.

a) Vis at $z = i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + (-2-i)z^2 + (5+2i)z - 5i$$

b) Finn de andre røttene til P.

c) Finn kompleks faktorisering av P.

Løsn.

a) $$P(i) = i^3 + (-2-i)\cdot i^2 + (5+2i)\cdot i - 5i$$
$$= \cancel{i}^3 - \underline{2i^2} - \cancel{i}^3 + \cancel{5i} + \underline{2i^2} - \cancel{5i} = 0$$

b)
$$\begin{array}{l}
\big(z^3 + (-2-i)z^2 + (5+2i)z - 5i\big) : (z-i) = z^2 - 2z + 5 \\
\underline{z^3 \quad - iz^2 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad -2z^2 + (5+2i)z - 5i \\
\qquad \underline{-2z^2 \quad + 2iz \qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad 5z - 5i \\
\qquad\qquad\qquad \underline{5z - 5i} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Altså: $P(z) = (z-i)\cdot(z^2 - 2z + 5)$

$z^2 - 2z + 5 = 0$ gir $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm i\cdot 4}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$$

De øvrige røttene er altså $z = \underline{\underline{1+2i}}$ og $z = \underline{\underline{1-2i}}$

c) $$P(z) = \underline{\underline{(z-i)\cdot\big(z-(1+2i)\big)\cdot\big(z-(1-2i)\big)}}$$

Lemma 3.5.3

La $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$
være et reelt polynom, dvs. $c_0, \ldots, c_n$ er reelle tall.
Hvis $z = r$ er en rot til P, er også $z = \bar{r}$ en rot.

Bevis Hvis $z = r$ er en rot, vet vi at

$$c_n \cdot r^n + \ldots + c_1 \cdot r + c_0 = 0$$

Konjugasjonsregler gir da

$$\overline{c_n r^n + \ldots + c_1 r + c_0} = \bar{0}$$

$$\overline{c_n r^n} + \ldots + \overline{c_1 r} + \bar{c}_0 = 0$$

$$\bar{c}_n \cdot \bar{r}^n + \ldots + \bar{c}_1 \cdot \bar{r} + \bar{c}_0 = 0$$

Siden c_i-ene er reelle, er $\bar{c}_i = c_i$ for alle i. Altså:

$$c_n \bar{r}^n + \ldots + c_1 \bar{r} + c_0 = 0. \quad \square$$

Lemma 3.5.4

To konjugerte røtter til et reelt polynom P har alltid samme multiplisitet, dvs. de forekommer like mange ganger i den komplekse faktoriseringen til P.

Bevis Vi har

$$(z - r) \cdot (z - \bar{r}) = z^2 - z\bar{r} - rz + r\bar{r}$$

$$= z^2 - \underbrace{(r + \bar{r})}_{\text{reelt tall}} z + \underbrace{|r|^2}_{\text{reelt tall}}$$

Lemmaet følger nå ved polynomdivisjon (snakket). $\square$

Setning 3.5.6 : Reell faktorisering

Ethvert reelt n'te-gradspolynom $P(z)$ kan faktoriseres som et produkt av reelle polynomer av grad 1 og 2.

Bevis Ved lemma 3.5.4 og regningen i beviset for dette, kan vi finne en reell faktorisering av $P(z)$ ved å starte med den komplekse faktoriseringen av $P(z)$ i førstegradspolynomer, og så gange sammen faktorene som svarer til konjugerte røtter. $\square$

Eks. 1 La $P(z) = z^4 + 1$

a) Finn kompleks faktorisering av $P(z)$

b) Finn reell — " —

Løsn.

a) $z^4 + 1 = 0$ gir $z^4 = -1$

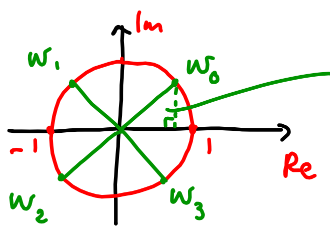
Må altså finne fjerderøttene til -1.

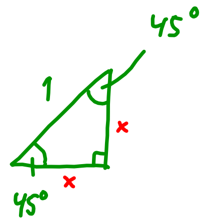
Har $-1 = 1e^{i\pi}$

$$w_0 = \sqrt[4]{1}\, e^{i(\pi/4)} = e^{i(\pi/4)}$$

$$w_1 = e^{i(2\pi/4)} = e^{i(\pi/2)}$$

Røttene ligger dermed slik:





$$x^2 + x^2 = 1^2$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Så røttene er: $w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Kompleks faktoring:

$$P(z) = \left(z - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cdot\left(z - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cdot\left(z - \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cdot\left(z - \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

b) $$\left(z - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot \left(z - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z + i\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}z - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z + \frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2} - i\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}z + i \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= z^2 - \sqrt{2}\,z + 1$$

Tilsvarende:

$$\left(z - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot \left(z - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \overset{\text{regn}}{=} z^2 + \sqrt{2}\,z + 1$$

Reell faktorisering

$$P(z) = \underline{\underline{\left(z^2 - \sqrt{2}\,z + 1\right) \cdot \left(z^2 + \sqrt{2}\,z + 1\right)}}$$