Eks. 2

a) Vis at $z = 1 + 2i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 11z + 10$$

b) Finn de øvrige røttene til P.

c) Finn den reelle faktoriseringen til P.

d) — " — komplekse — " —

Løsn.

a) $P(1+2i) = (1+2i)^4 + (1+2i)^3 + (1+2i)^2 + 11\cdot(1+2i) + 10 \overset{\text{regn}}{=} 0$

b) Siden P er et reelt polynom, vet vi at $z = \overline{1+2i} = 1-2i$ også er en rot. Så både

$$\big(z-(1+2i)\big) \quad \text{og} \quad \big(z-(1-2i)\big)$$

er faktorer i P. Vi ganger dem sammen

$$[z-(1+2i)]\cdot[z-(1-2i)] = (z-1-2i)\cdot(z-1+2i)$$

$$= z^2 - z + \cancel{2iz} - z + 1 - \cancel{2i} - \cancel{2iz} + \cancel{2i} + 4$$

$$= z^2 - 2z + 5$$

Polynomdivisjon:

$$(z^4+z^3+z^2+11z+10):(z^2-2z+5) = z^2+3z+2$$

$$
\begin{array}{l}
z^4 - 2z^3 + 5z^2 \\
\hline
\quad 3z^3 - 4z^2 + 11z + 10 \\
\quad 3z^3 - 6z^2 + 15z \\
\hline
\qquad 2z^2 - 4z + 10 \\
\qquad 2z^2 - 4z + 10 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Altså $P(z) = z^4+z^3+z^2+11z+10 = (z^2-2z+5)\cdot(z^2+3z+2)$

Faktoriserer videre

$z^2 + 3z + 2 = 0$ gir $z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Så $z^2 + 3z + 2 = (z - (-1)) \cdot (z - (-2))$

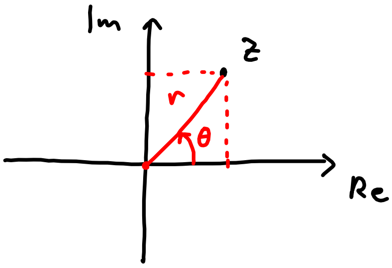
$= (z+1) \cdot (z+2)$

De øvrige røttene er $z = \underline{\underline{1 - 2i}}$, $z = \underline{\underline{-1}}$ og $z = \underline{\underline{-2}}$

c) $P(z) = \underline{\underline{(z^2 - 2z + 5) \cdot (z+1) \cdot (z+2)}}$

d) $P(z) = \underline{\underline{(z - (1+2i)) \cdot (z - (1-2i)) \cdot (z+1) \cdot (z+2)}}$

Teorien for komplekse tall ("repetisjon")

1. 

- Adderer og subtraherer komplekse tall som vektorer
- Multipliserer dem ved å addere vinkler og gange sammen avstander fra origo.

2. Kan da "se" geometrisk at de grunnleggende algebraiske lovene (bok: 3.2.5) vil gjelde:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \qquad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \qquad \text{(osv.)}$$

3. Kan da regne slik $a + ib$ = punktet (a, b)

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

og ta dette som definisjonen av multiplikasjon. (Tom starter her.)

4. Kan så verifisere reglene 3.2.5 algebraisk.

Eksempel: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Setter $z_j = a_j + i b_j$ for $j = 1, 2, 3$ og regner ut begge sider.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_3 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)\cdot(a_3 + ib_3) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ &\quad + (a_1 a_3 - b_1 b_3) + i(a_1 b_3 + b_1 a_3) \\ &= [(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3)] \\ &\quad + i[(a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 b_3 + b_1 a_3)] \end{aligned}$$

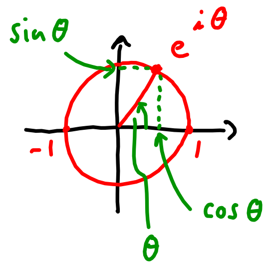
$$= [a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3] + i[a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_3 + b_1 a_3]$$

Regner du ut $z_1(z_2 + z_3)$ på samme måte, får du samme svar.

5 Kan definere

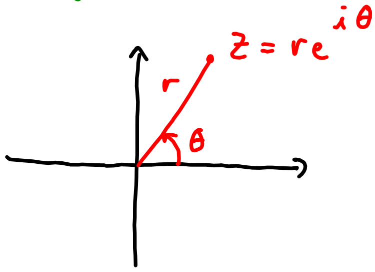
a) $e^{i\theta} \overset{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

for alle $\theta \in \mathbb{R}$



b) $e^{a+ib} \overset{\text{def}}{=} e^{a} \cdot e^{ib}$

c) $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= (r\cos\theta) + i(r\sin\theta)$



Har også (dette har vi ikke gjort før):

d) $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

vet fra reell teori $= \cos\theta - i\sin\theta$

Addisjon av a) og d) gir

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad \text{så} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Subtraksjon a) - d) gir

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta, \quad \text{så} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Kan så til slutt definere sinus og cosinus for alle $z \in \mathbb{C}$ ved

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

6 Kan så bevise at

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Bevis $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$

$$= r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

Summeformler (vet fra reell teori)

$$= r_1 r_2 \cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \square$$