4.3 Konvergens av følger

En <u>følge</u> er en uendelig lang liste av tall

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Kan skrive følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

<u>Eks. 1</u> Skriv ut de 5 første leddene i følgen

$$\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$$

<u>Løsn.</u> $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ altså $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ □

<u>Eks. 2</u> Undersøk hva som skjer med leddene i følgen

$$\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

når n blir stor $(n \to \infty)$

<u>Løsn.</u> Følgen blir $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}, \frac{8}{10}, \ldots$

Leddene nærmer seg 1. □

Vi sier at følgen med

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$

<u>konvergerer mot 1</u>, og skriver

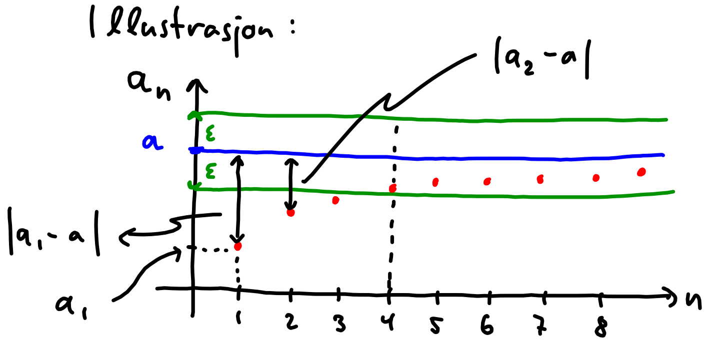
$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

<u>Presis definisjon:</u> Hvis det for hvert tall $\varepsilon > 0$ (ε : epsilon) fins N slik at

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N,$$

sies følgen $\{a_n\}$ å <u>konvergere mot tallet a</u>.

Illustrasjon:



Til denne ε-en ser det ut til at $N = 4$ fungerer

Hvis $\{a_n\}$ konvergerer mot a, skriver vi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

En følge som ikke konvergerer mot noe tall, sies å <u>divergere</u>.

Teknikk for å bruke definisjonen til å vise at en følge $\{a_n\}$ konvergerer mot a:

1. Finn avstanden $|a_n - a|$ mellom a_n og a
2. Sett avstanden mindre enn ε, og løs ulikheten med hensyn på n.

Eks. 1 Bruk definisjonen til å vise at følgen $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mot 1.

Løsn. ① $\left|a_n - 1\right| = \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+2} - \frac{n+2}{n+2}\right|$

$$= \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2}$$

② $\frac{2}{n+2} < \varepsilon$ gir $2 < \varepsilon \cdot (n+2)$

$$\varepsilon \cdot (n+2) > 2$$

$$n+2 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 2$$

Gitt $\varepsilon > 0$ kan vi altså velge N som $\frac{2}{\varepsilon} - 2$ avrundet oppover til neste hele tall. $\square$

Eks. 2 Vis at $\lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{\frac{(-1)^n}{n} + 2}_{a_n}\right) = 2$ ved å bruke definisjonen.

Løsn. ① $\left|a_n - 2\right| = \left|\left(\frac{(-1)^n}{n} + \cancel{2}\right) - \cancel{2}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$

② $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gir $1 < \varepsilon \cdot n$, dvs. $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Gitt $\varepsilon > 0$ kan vi altså velge N som $\frac{1}{\varepsilon}$ avrundet oppover til neste hele tall. $\square$

Setning 4.3.3

Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, så er

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ huis $b \neq 0$.

Bevis Tar kun (ii). Bruker teknikken vår.

① $|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b - b_n)|$

Trekantulikheten: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$\leq |a_n - a| + |b - b_n|$

$= |a_n - a| + |b_n - b|$

② $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$: Dette kan vi få til ved å velge N_1 slik at

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for alle } n \geq N_1$$

og velge N_2 slik at

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for alle } n \geq N_2$$

Slike valg kan vi gjøre, fordi $a_n \to a$ og $b_n \to b$.
Hvis vi da velger N som den største av N_1 og N_2, har vi

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N. \ \square$$

Forrige setning gjør at vi kan tenke "bit for bit" når vi skal finne grenser.

Eks. 1 Finn $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{\pi + 4\cdot 3^n}$

Løsn. Vi deler på det dominerende leddet 3^n oppe og nede:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{\pi + 4\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{(-2)^n}{3^n}}^{\to 0} + 1}{\underbrace{\frac{\pi}{3^n}}_{\to 0} + 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$