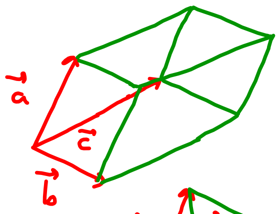
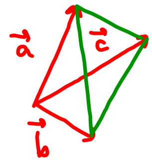
Teorem Volumet av <u>parallellepipedet</u> utspent av vektorene $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er

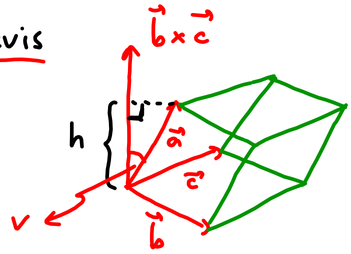
$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$$



Volumet av <u>pyramiden</u> utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er $1/6$ av dette



Bevis



$$\begin{aligned} V &= G \cdot h \\ &= |\vec{b}\times\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos v \\ &= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \end{aligned}$$

[minus hvis $\vec{b}\times\vec{c}$ peker motsatt vei]

Regn så ut determinanten og $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, og se at de er like bortsett evt. fra fortegnet. $\square$

Eks. Finn volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $(1,2,5)$, $(2,3,0)$ og $(2,5,7)$

Løsn.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(21-0) - 2\cdot(14-0) + 5\cdot(10-6)$$

$$= 21 - 28 + 20 = \underline{\underline{13}}$$

Matriser (1.5 og 1.6)

En $(m \times n)$-matrise er et tallskjema med m rader (linjer) og n søyler.

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{er en } (2 \times 3)\text{-matrise}$$

Notasjon : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ F. eks. $A_{13} = -1$, $A_{22} = 3$

Multiplikasjon av matriser

Anta at vi skal finne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da setter vi det opp sånn :

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \end{array}$$

Produktet kommer fram her !

For å finne ut hva som skal stå på en gitt plass i produktmatrisen, tar vi skalarproduktet av linjen og søylen som peker inn mot plassen :

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & & \\ 0 & 1 & 2 & \bullet & \end{array}$$

Her skal det stå $0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 \end{array}$$

Så konklusjonen er at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Som eksempel ganger vi de samme matrisene i omvendt rekkefølge:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 0 & 3 \\ & & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}}}$$

Altså er matrisemultiplikasjon ikke kommutativt: Det kan skje at

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Annen regning med matriser

Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar (tall) foregår komponentvis. Å transponere en matrise betyr å bytte linjer med søyler.

Eks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3 & 19 & 7 \end{bmatrix}}}$$

transponert

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Teorem Regneregler for matriser

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$ og $A(B-C) = AB - AC$

(3) $(B+C)A = BA + CA$ og $(B-C)A = BA - CA$

(4) $(sA)\cdot B = A\cdot(sB) = s\cdot(A\cdot B)$ for alle tall s

(5) $A + B = B + A$, men $A\cdot B \neq B\cdot A$ generelt

(6) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Bevis (2) - (6) kan sjekkes ved "direkte" regning og forstås intuitivt (Vi dropper dette, se bok).

Eks. REMA: Brød 24.50, 1ℓ melk 14.90, 1ℓ juice 18.90
KIWI: Brød 25.90, 1ℓ melk 12.90, 1ℓ juice 17.90

Barnehagen trenger hver mandag:

Ertekroken (store barn)	Masalusa (småbarnsavd.)
7 brød	3 brød
5ℓ melk	2ℓ melk
1ℓ juice	0ℓ juice

Kan samle informasjonen i matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 24.50 & 14.90 & 18.90 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan da regne ut:

REMA: 264.90 for Ertekrok, 103.30 for Masalusa
KIWI: 263.70 — " —, 103.50 — " —

Kan samle denne informasjonen i matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A\cdot B = \begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 3\\ & & & 5 & 2\\ & & & 1 & 0\\ \hline 24.50 & 14.90 & 18.90 & 264.90 & 103.30\\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & 263.70 & 103.50\end{array} = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30\\ 263.70 & 103.50\end{bmatrix} = C$$

For å begrunne (1) fra teoremet, skal vi utvide barnehageeksemplet.

Antall avdelinger med	Leverandør 1	Leverandør 2
Ertekrok-matbehov	4	1
Masalus-matbehov	3	2

Samler leverandør-info i matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

Vi får nå

$$(AB)D = \begin{array}{cc|cc} & & 4 & 1\\ & & 3 & 2\\ \hline 264.90 & 103.30 & 1369.50 & 471.50\\ 263.70 & 103.50 & 1365.30 & 470.70\end{array}$$

L1 hos REMA

L2 hos REMA

L2 hos KIWI

L1 hos KIWI

På den annen side

$$BD = \begin{array}{cc|cc} & & 4 & 1\\ & & 3 & 2\\ \hline 7 & 3 & 37 & 13\\ 5 & 2 & 26 & 9\\ 1 & 0 & 4 & 1\end{array} = \begin{bmatrix} 37 & 13\\ 26 & 9\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

Hvor mange brød trenger L2?

— " — liter melk — " —

— " — " — juice — " —

$$A(BD) = \begin{array}{ccc|cc} & & & 37 & 13\\ & & & 26 & 9\\ & & & 4 & 1\\ \hline 24.50 & 14.90 & 18.90 & 1369.50 & 471.50\\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & 1365.30 & \boxed{470.70}\end{array}$$

Hvor mye L2 må betale hos KIWI.

Vi ser at det ikke er tilfeldig at dette blir lik $(AB)D$

Matrisenes formater og tall kan endres til vilkårlige matriser.

Altså gir dette en generell begrunnelse for at $A(BD) = (AB)D$.

Regelen kan også sjekkes algebraisk. □

Matriselikninger. Matriser som avbildninger

Eks. $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$ kan skrives som matriselikningen $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Her er

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 4 & 2 & 4x+2y \\ -1 & 3 & -x+3y \end{array} = \begin{bmatrix} 4x+2y \\ -x+3y \end{bmatrix}$$

Så matriselikningen sier at $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ -x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$. $\square$

En $(n \times n)$-matrise A kan oppfattes som en funksjon eller en avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$, altså en funksjon

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

ved at punktene i $\mathbb{R}^n$ oppfattes som søylevektorer, og vi ganger med A fra venstre.

Eks. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ definerer en funksjon

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ved at

$$A(x,y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

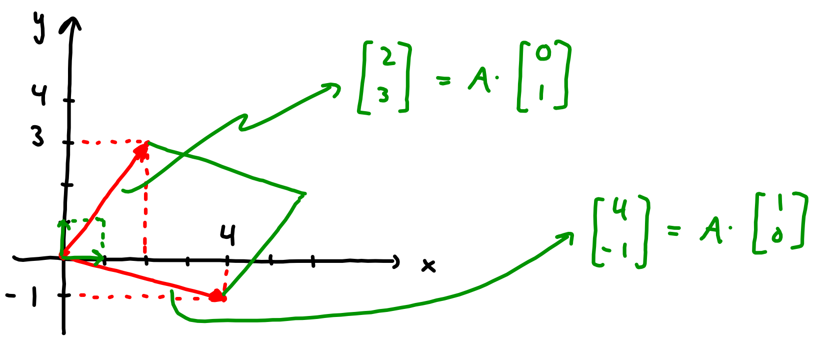
For eksempel:

$$A(5,7) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 5 \\ & & 7 \\ \hline 4 & 2 & 34 \\ -1 & 3 & 16 \end{array} = \begin{bmatrix} 34 \\ 16 \end{bmatrix} = (34, 16)$$

$$A(1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 0 \\ \hline 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = (4, -1)$$

$$A(0,1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & & 1 \\ \hline 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (2, 3)$$

Så: En matrise avbilder alltid standardbasisvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ over på søylevektorene sine.



Identitetsmatriser

er matrisene

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ osv.}$$

Disse oppfører seg som tallet 1 ved matrisemultiplikasjon:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

for alle matriser A slik at produktene er definert.

Eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & \pi \\ & & \sqrt{2} \\ \hline 1 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{array} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

En $(n \times n)$-matrise A kalles invertebar hvis det fins en $(n \times n)$-matrise A^{-1} slik at

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$

der I_n er identitetsmatrisen av størrelse n. Hvis A ikke er invertebar, kalles den singulær. A^{-1} kalles den inverse matrisen til A.

Eks. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ har invers matrise

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$$

Vi har nemlig:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{array}{cc|cc} & & 3/14 & -2/14 \\ & & 1/14 & 4/14 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

(Merk analogien for tall: $3 \cdot 3^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$)

Generelt:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s/d & -q/d \\ -r/d & p/d \end{bmatrix} \quad \text{der } d = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

Bevis

$$\begin{array}{cc|cc} & & s/d & -q/d \\ & & -r/d & p/d \\ \hline p & q & (ps-qr)/d & (-pq+qp)/d \\ r & s & (rs-sr)/d & (-rq+ps)/d \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$