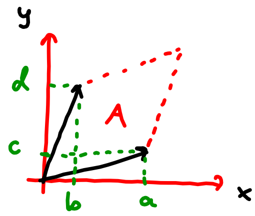
Resultater om determinanter



① Absolutverdien av $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

② $\det(A) = \det(A^T)$ for alle kvadratiske matriser A.

③ A er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ — " — " —

④ $\det I = 1$ for alle identitetsmatriser I

⑤
- Byttes to linjer i en determinant, skifter den fortegn
- Ganger vi alle tall i en linje med et tall s, så multipliseres determinanten med s
- Legger vi s ganger en linje til en annen linje, endres ikke determinanten.

Bevis ① Areal parallellogram $\overset{\text{vet}}{=} |(a, c, 0) \times (b, d, 0)|$

$$= \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= |\vec{e}_1 \cdot 0 - \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 \cdot (ad - bc)|$$

$$= |ad - bc| = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|$$

② - ⑤ Dropper formelt bevis her. Snakket. □

Matrisedynamikk

- Tiden regnes i tidspunkter $t = 0, 1, 2, \ldots$
- Tilstanden til systemet ved tid $t = n$ er gitt ved en tilstandsvektor

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{(Her: To-dimensjonalt tilfelle, } n = 2\text{)}$$

- Vi regner oss ett hakk fremover i tiden ved å gange tilstandsvektoren med en overgangsmatrise M:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{for } n \geq 0$$

Eksempel

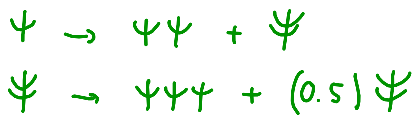
$$\left.\begin{array}{l} x_n : \text{Antall unge planter} \\ y_n : \text{— " — gamle — " —} \end{array}\right\} \text{ved tid } t = n \text{, } t \text{ måles i år}$$

Modell:

1. Hver gammel plante gir opphav til 3 nye ungplanter neste år, men kun halvparten av de gamle plantene overlever selv til neste år
2. Alle unge planter overlever til neste år, og de er da blitt gamle. I tillegg sprer hver ungplante frø til to nye ungplanter neste år.

Finn overgangsmatrisen M.

Løsning Vi finner x_{n+1} og y_{n+1} uttrykt ved x_n og y_n.



Dette gir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{unge planter neste år}) = 2 \cdot x_n + 3 \cdot y_n \\ y_{n+1} = (\text{gamle — " — }) = x_n + (0.5)\, y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \text{dvs. } M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sjekk:

$$\begin{array}{cc|c} & & x_n \\ & & y_n \\ \hline 2 & 3 & 2x_n + 3y_n \\ 1 & 0.5 & x_n + 0.5y_n \end{array} = \begin{bmatrix} 2x_n + 3y_n \\ x_n + 0.5y_n \end{bmatrix}$$

Vi bygger ut eksemplet litt :

- Anta at $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$

  Da er $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 10 \\ & & 20 \\ \hline 2 & 3 & 80 \\ 1 & 0.5 & 20 \end{array} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix}$

- Finn en matrise N slik at vi kommer to år frem i tiden ved å gange med N.

  To år frem: $M \cdot \left(M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right) = (M \cdot M) \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

  $= M^2 \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

  Får

  $$M^2 = M \cdot M = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & 3 \\ & & 1 & 0.5 \\ \hline 2 & 3 & 7 & 7.5 \\ 1 & 0.5 & 2.5 & 3.25 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 & 7.5 \\ 2.5 & 3.25 \end{bmatrix}}}$$

- Finn en matrise A slik at vi kommer ett år tilbake i tiden ved å gange med A.

  Poeng: $\det(M) \neq 0$, så M^{-1} fins. Og:

  $$M^{-1}\left(M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right) = (M^{-1} \cdot M) \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$
  $$= I \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$
  $$= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

  Vi finner så M^{-1}: Formel: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

  $$M^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 0.5 - 3 \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
  $$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0.25 & 1.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}}}$$

Funksjoner av flere variable (2.1)

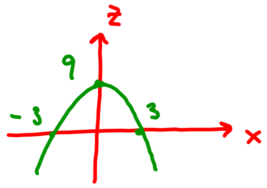
$\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles for

- et <u>skalarfelt</u> hvis $m = 1$
- en <u>vektorvaluert</u> funksjon hvis $m > 1$.

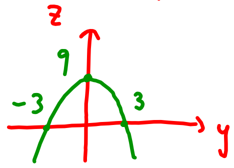
<u>eks. 1</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)$

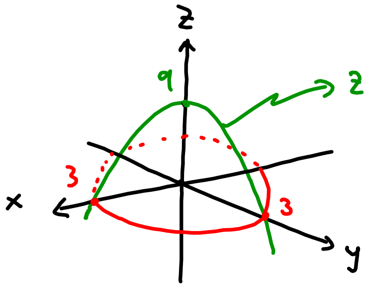
(Dette er et skalarfelt av 2 variable)

Merk at : $f(x,0) = 9 - x^2$



$f(0,y) = 9 - y^2$





$$\left.\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ &= 9 - (x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} \text{grafen til } f$$

<u>eks. 2</u> $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{3}, \frac{x}{3}\right)$

Her : $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (vektorvaluert funksjon av to variable, også kalt et <u>vektorfelt</u>)

For eksempel er $\vec{F}(1,1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$