Kontinuitet (2.2)

Avstand mellom punktene $\vec{x}$ og $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^n$:

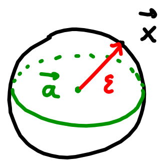
$$|\vec{x}-\vec{a}| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}$$

= lengden av vektoren fra $\vec{a}$ til $\vec{x}$

Kulen med sentrum $\vec{a}$ og radius ε:

$$B(\vec{a},\varepsilon) = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{a}| < \varepsilon\}$$

= mengden av punkter i $\mathbb{R}^n$ med avstand mindre enn ε til punktet $\vec{a}$.

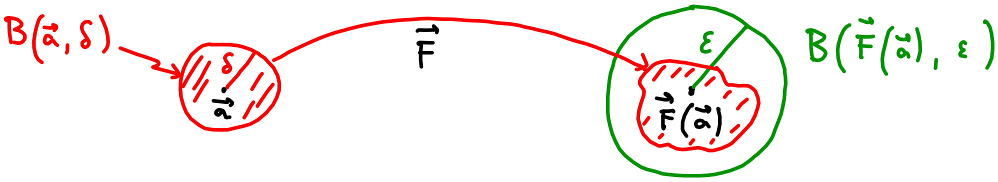


Definisjon (kontinuitet)

La $A\subseteq\mathbb{R}^n$ og $\vec{a}\in A$. En funksjon $\vec{F}: A\to\mathbb{R}^m$ kalles kontinuerlig i $\vec{a}$ hvis det til hver $\varepsilon>0$ fins $\delta>0$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x})-\vec{F}(\vec{a})|<\varepsilon \quad \text{for alle } x\in A \text{ slik at } |\vec{x}-\vec{a}|<\delta.$$

Figur: $A \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^m$



Teorem (2.2.2)

Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^n$, og at $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige i $\vec{a} \in A$.
Da er $\vec{F} + \vec{G}$, $\vec{F} - \vec{G}$, $\vec{F} \cdot \vec{G}$ og $\vec{F}/\vec{G}$ også kontinuerlige i $\vec{a}$, det siste forutsatt at $m = 1$ og $\vec{G}(\vec{a}) \neq 0$.

Bevis Tar $\vec{F} - \vec{G}$ som eksempel. Gitt $\varepsilon > 0$.

$$\left|[\vec{F}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})] - [\vec{F}(\vec{a}) - \vec{G}(\vec{a})]\right|$$

$$= \left|[\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})] + [\vec{G}(\vec{a}) - \vec{G}(\vec{x})]\right|$$

trekantulikheten $|\vec{s} + \vec{t}| \leq |\vec{s}| + |\vec{t}|$

$$\leq |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| + |\vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{a})|$$

Siden $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ fins δ_1 slik at hvis $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_1$ så er

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Og siden $\vec{G}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ fins δ_2 slik at hvis $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_2$ så er

$$|\vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La δ være den minste av δ_1 og δ_2. Hvis da $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$, har vi

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| + |\vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Altså er da

$$\left|[\vec{F}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})] - [\vec{F}(\vec{a}) - \vec{G}(\vec{a})]\right| < \varepsilon. \quad \square$$

Teorem (2.2.3)

Hvis $\vec{G}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ og $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{G}(\vec{a})$, så er $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ kontinuerlig i $\vec{x} = \vec{a}$.

Bevis: Se bok (trykkfeil, skal være referanse til 5.1.6 i Kalkulus)

Teorem (2.2.4)

$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x}))$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ hvis og bare hvis hver komponentfunksjon F_i er kontinuerlig i $\vec{a}$.

Bevis Se bok.

Eks. Begrunn at $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ er kontinuerlig, dvs. kontinuerlig for alle $(x,y) \in D_f = \mathbb{R}^2$.

Løsn. Vet at $g(x,y) = x$ og $h(x,y) = y$ er kontinuerlige

Så da er $k(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ kontinuerlig ved teorem 2.2.2

Altså er $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) = \ln(k(x,y))$ kontinuerlig ved teorem 2.2.3. $\square$

$\boxed{\text{Grenseverdier (2.3)}}$

Et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et <u>opphopningspunkt</u> for en mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hvis enhver kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ om $\vec{a}$ inneholder uendelig mange punkter fra A.

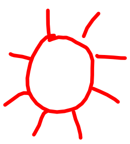
(Dette er det samme som å si at mengden A inneholder punkter vilkårlig nær inntil $\vec{a}$.)

Definisjon (grense)

La $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $a \in \mathbb{R}^n$ er et opphopningspunkt for A. Vi sier at $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ er grenseverdien for $\vec{F}$ når $\vec{x}$ går mot $\vec{a}$ hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon \quad \text{for alle } x \in A \text{ slik at } 0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta.$$

Får da setningene 2.3.3, 2.3.4 og 2.3.5



2.3.3: komponentvis beregning

2.3.4: regneregler for grenseverdier

2.3.5: Sammenheng med kontinuitet:

$$\underbrace{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a})}_{\vec{F} \text{ kontinuerlig i } \vec{a}}$$

Neste uke : Derivasjon av funksjoner med flere variable (frampeik)

Eksempel $f(x,y) = 9 - (x^2 - y^2) = 9 - x^2 + y^2$

Partiell derivert med hensyn på x : $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ (betrakter y som et konstant tall)

— " — " — " — y : $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ (— " — x — " — — " —)

$g(x,y) = 2xy^2$ gir $\frac{\partial g}{\partial x} = 2y^2$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2x \cdot 2y = 4xy$