Eks. 2 Finn $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)$ ("$\infty-\infty$")

Løsn. Vi ganger og deler med det "konjugerte" uttrykket

$$\sqrt{4n^2+n}+2n$$

Da får vi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\cdot\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\cancel{4n^2}+n)-\cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$

Deler på dominerende ledd n oppe og nede

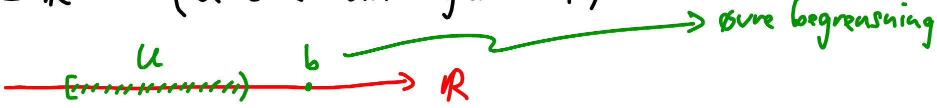
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}=\frac{\sqrt{4n^2+n}}{\sqrt{n^2}}=\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}}=\sqrt{\frac{4+\frac{1}{n}}{1}}\to\sqrt{\frac{4}{1}}=2}$$

Delte på n^2 $\quad$ $\frac{1}{n}\to 0$

Bakgrunnskunnskap fra kap 2

La $U \subseteq \mathbb{R}$ (U er en delmengde av $\mathbb{R}$)



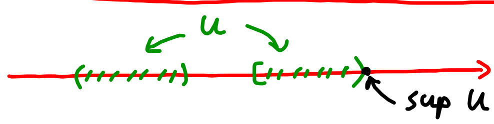
Med en øvre begrensning for U menes et reelt tall b slik at alle $a \in U$ oppfyller $a \leqslant b$. Hvis U har en øvre begrensning, kalles den oppad begrenset.

Definisjon

Med $\sup U$ (supremum til U) menes den minste øvre begrensningen til U, hvis en slik fins.

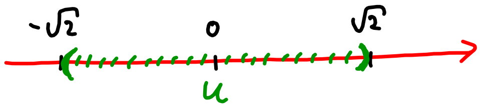
Kompletthetsprinsippet (2.3.2)

Hvis $U \subseteq \mathbb{R}$ er ikke-tom og oppad begrenset, så fins $\sup U$.

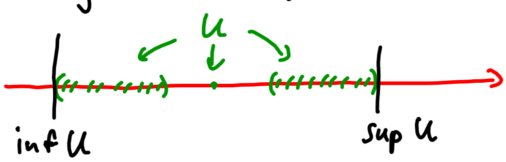


Kompletthetsprinsippet ville ikke holdt hvis vi kun jobbet med mengden $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall. Moteksempel:

U = mengden av alle x slik at $x^2 < 2$



Tilsvarende: Begrepene $\inf U$ (infimum til U) og "nedad begrenset"



$a = 0{,}1010010001000001\ldots$ irrasjonalt

$a = 0{,}131515151515\ldots$ rasjonalt, fordi

$$\left.\begin{aligned} 100a &= 13{,}1515151 5\ldots \\ 10\,000a &= 1315{,}151515\ldots \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 10\,000a - 100a &= 1315 - 13 = 1302 \\ 9900a &= 1302 \\ a &= \frac{1302}{9900} \end{aligned}$$

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kalles

- voksende hvis $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$
- avtakende " $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$
- oppad begrenset hvis det fins M slik at $a_n \leq M$ for alle n
- nedad — " — " — $a_n \geq M$ — " —

Kompletthetsprinsippet for følger (4.3.9)

(i) Hvis en følge er voksende og oppad begrenset, så konvergerer den

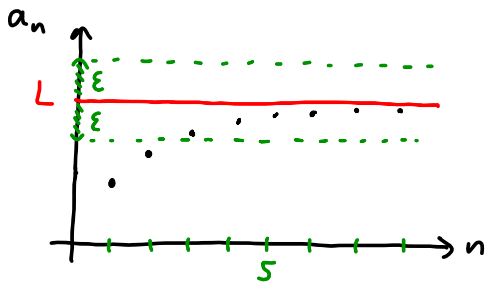
(ii) — " — avtakende og nedad — " — " — " —

Bevis (i) Hvis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende og oppad begrenset, så fins

$$L = \sup\{a_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

ved kompletthetsprinsippet for reelle tall. Gitt $\varepsilon > 0$ fins da $N \geq 1$ slik at

$$|a_N - L| < \varepsilon$$



Men siden følgen er voksende, får vi da

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$.

Altså har vi bevist at $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. □

Eks. Vis at følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gitt ved $a_1 = 0$ og

$$a_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}} \qquad \text{for } n \geq 1$$

konvergerer, og finn ut hva den konvergerer mot.

Løsn. Sjekker ut litt: $a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$a_3 = \sqrt{\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} =$ osv.

① Vi starter med å undersøke hvilket tall L følgen kan konvergere mot, hvis den konvergerer. Vi får

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{a_{n+1}}_{L} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\underbrace{\tfrac{1}{2}a_n}_{\frac{1}{2}L} + \tfrac{1}{2}}$$

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}L + \tfrac{1}{2}}$$

$$L^2 = \tfrac{1}{2}L + \tfrac{1}{2}$$

$$L^2 - \tfrac{1}{2}L - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$L = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$L = -\frac{1}{2}$ er umulig fordi $a_n \geq 0$ for alle n.

Altså konvergerer følgen mot 1, hvis den konvergerer.

2 Vi viser at følgen er oppad begrenset av tallet $L=1$, altså at $a_n \leq 1$ for alle $n \geq 1$. Bruker induksjon.

Vi har $a_1 = 0 \leq 1$ (ok!)

Anta $a_n \leq 1$. Da er

$$a_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}} \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Altså $a_{n+1} \leq 1$ også. Dermed vet vi at $a_n \leq 1$ for alle $n \geq 1$.

3 Vi viser at følgen er voksende, altså at $a_{n+1} \geq a_n$ for alle $n \geq 1$.

Vi får

$$a_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}} \overset{\text{trix}}{=} \sqrt{\tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}\cdot 1} \geq \sqrt{\tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}a_n}$$

$1 \geq a_n$

$$= \sqrt{a_n} \geq a_n$$

fordi $a_n \leq 1$

Altså er følgen voksende.

4 Siden vi har vist at følgen er voksende og oppad begrenset, gir kompletthetsprinsippet for følger at den konvergerer.

Vi har da vist at den konvergerer mot 1.