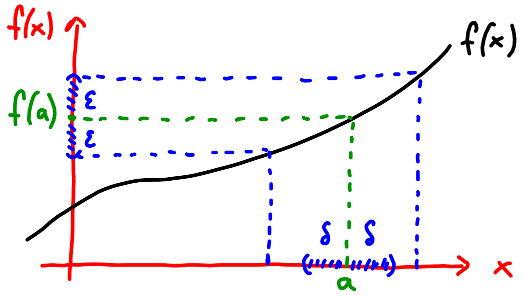
5.1 Kontinuitet

Definisjon (5.1.1)

At funksjonen f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ betyr at:

> For hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at
> når $x \in D_f$ og $|x-a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$



Hvis f er kontinuerlig i alle punkter $a \in D_f$, kalles f kontinuerlig.

Teknikk for å bruke definisjonen til å vise at $f(x)$ er kontinuerlig i $x = a$:

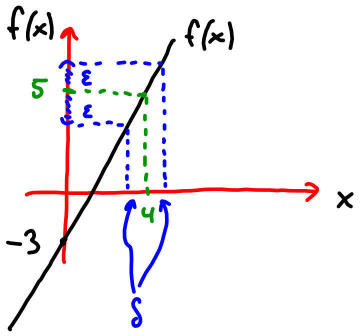
① Sett $x = a + h$, og finn avstanden

$$|f(x) - f(a)| = |f(a+h) - f(a)|$$

② Sett avstanden mindre enn ε, og løs ulikheten med hensyn på $|h|$

Eks. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at $f(x) = 2x - 3$ er kontinuerlig i $x = 4$.

Løsn.



Vi har $f(4) = 8 - 3 = 5$

"Ser" at vi til gitt $\varepsilon > 0$ kan velge $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Bruker "teknikken": Har $a = 4$, $f(a) = f(4) = 5$

1. $$|f(a+h) - f(a)| = |f(4+h) - f(4)|$$
$$= |[2(4+h) - 3] - 5|$$
$$= |[\cancel{8} + 2h - \cancel{3}] - \cancel{5}| = |2h|$$

2. $|2h| < \varepsilon$ gir $2 \cdot |h| < \varepsilon$
$$|h| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dette betyr at vi kan ta $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Vi har altså vist at man til hver gitt $\varepsilon > 0$ kan velge $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
Da har vi vist at f er kontinuerlig i punktet $x = 4$. $\square$

I praksis brukes oftest regler for kontinuitet i stedet for definisjonen:

Setning 5.1.5

Anta at f og g er kontinuerlige i punktet a.
Da er $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og f/g også kontinuerlige i a. (Det siste kun hvis $g(a) \neq 0$.)

Bevis (Skisse.) Viser dette for $f-g$, de andre er "tilsvarende".

$$\left|[f(x)-g(x)] - [f(a)-g(a)]\right| = \left|[f(x)-f(a)] + [g(a)-g(x)]\right|$$

Trekantulikheten
$|A+B| \leq |A|+|B|$

$$\leq |f(x)-f(a)| + |g(a)-g(x)|$$

$$= |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)|$$

Gitt $\varepsilon > 0$. Siden $f(x)$ er kontinuerlig i $x=a$, kan vi finne δ_1 slik at hvis $|x-a| < \delta_1$, er $|f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Videre: Siden $g(x)$ er kontinuerlig i $x=a$, kan vi finne δ_2 slik at hvis $|x-a| < \delta_2$, er $|g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Hvis vi lar δ være den minste av δ_1 og δ_2, har vi da

$$|f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Teorem 5.1.7

Anta at g er kontinuerlig i punktet a, og at f er kontinuerlig i punktet $g(a)$. Da er

$$h(x) = f(g(x))$$

kontinuerlig i punktet a.

Bevis Kalkulus $\square$