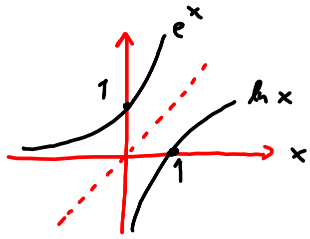
Konsekvens av setningene vi så på sist: (Røft beskrevet)

Funksjoner definert ved en fast formel (bygget opp av polynomer, rasjonale funksjoner, trigonometriske funksjoner, logaritmer og eksponentialfunksjoner osv.) er kontinuerlige i alle punkter der formelen gir mening.

Hvis ikke noe annet er sagt, er definisjonsmengden D_f til en funksjon f gitt ved en formel $f(x)$ underforstått å være mengden av alle punkter x slik at formelen $f(x)$ gir mening.

Verdimengde: V_f = verdimengden til f $= \{f(x) : x \in D_f\}$

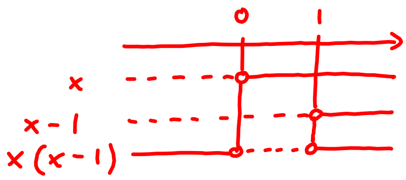
Eks. Finn D_f for $f(x) = \ln(x^2 - x)$ og vis at f er kontinuerlig.
[Antar vi vet at $\ln$ er kontinuerlig]



Løsn. Hvis x skal ligge i D_f, må

$$x^2 - x > 0$$

dvs. $x(x-1) > 0$



Altså $D_f = \underline{\underline{(-\infty, 0) \cup (1, \infty)}}$

Bevis for kontinuitet:

- Vi vet vi at funksjonen $g(x) = x$ er kontinuerlig.
- Så x^2 er kontinuerlig, fordi produktet av to kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig
- Så $x^2 - x$ er kont., fordi differensen mellom to kont. funk. er kontinuerlig
- Dermed er $\ln(x^2 - x)$ også kontinuerlig, fordi sammensetningen av to kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig.

Kommentar: Verdimengden er $V_f = (-\infty, \infty)$
fordi $x^2 - x \to \infty$ når $x \to \infty$
og $x(x-1) = x^2 - x \to 0$ når $x \to 1^+$

5.2 Skjæringssetningen

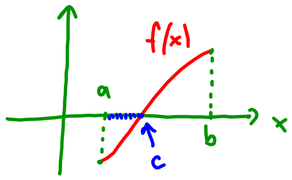
Med et nullpunkt for en funksjon f menes et punkt $x \in D_f$ slik at

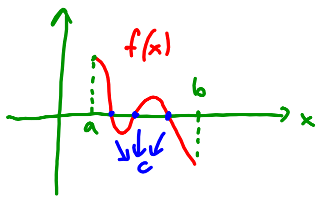
$$f(x) = 0$$

Skjæringssetningen (5.2.1)

Anta at f er kontinuerlig på $[a, b]$, og at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn. Da fins $c \in [a, b]$ slik at

$$f(c) = 0$$





Bevis Vi viser dette i tilfellet $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$.

Vi lar $c = \sup \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$

Skal bevise at $f(c) = 0$.

Anta $f(c) > 0$. La $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$.

Siden f er kontinuerlig, fins $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in (c - \delta, c + \delta)$$

Men da er $c - \frac{\delta}{2}$ også en øvre begrensning for mengden c skulle være supremum av. Det er umulig, siden c er minste øvre begrensning. Ergo er $f(c) > 0$ umulig.

Tilsvarende vises at $f(c) < 0$ er umulig. Så $f(c) = 0$. □

Eks. Vis at likningen $x^{17} + \pi x^{16} + x \ln 2 - 1 = 0$ har en løsning x i intervallet $(0, 1)$.

Løsn. Vi setter $f(x) = x^{17} + \pi x^{16} + x \ln 2 - 1$

Har da $f(0) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1 < 0$

$f(1) = 1 + \pi + 1 \cdot \ln 2 - 1 = \pi + \ln 2 > 0$

Ved skjæringssetningen har dermed $f(x)$ et nullpunkt i intervallet $[0, 1]$. Siden $f(0) < 0$ og $f(1) > 0$, må dette nullpunktet x ligge i intervallet $(0, 1)$. Dette tallet x er en løsning av likningen vår. □

5.3 Ekstremalverdisetningen

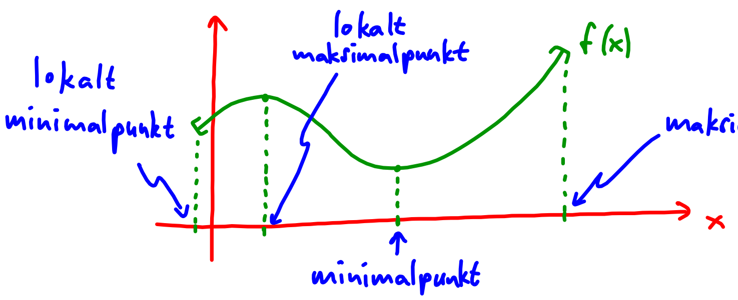
En funksjon kalles oppad begrenset hvis V_f (verdimengden) er oppad begrenset, og nedad begrenset hvis V_f er nedad begrenset.
Hvis f er både oppad og nedad begrenset, kalles den begrenset.

Teorem Hvis f er kontinuerlig og D_f er et lukket intervall $[a, b]$, så er f begrenset.

Bevis La $c = \sup \{x \in [a,b] : f \text{ er begrenset på } [a,x]\}$

Da er $c = b$ (dropper detaljene, snakket) $\square$

Definisjon
La f være en funksjon. Et punkt $a \in D_f$ kalles et
maksimalpunkt for f hvis $f(x) \leq f(a)$ for alle $x \in D_f$
minimalpunkt — " — $f(x) \geq f(a)$ — " —
"Ekstremalpunkt" er en fellesbetegnelse for maksimalpunkt og minimalpunkt.



Ekstremalverdisetningen (5.3.5)

Hvis f er kontinuerlig og D_f er et lukket intervall $[a, b]$, så har f minst ett maksimalpunkt og ett minimalpunkt.

Bevis Vi viser at f har et maksimalpunkt. At den har et minimalpunkt, vises helt tilsvarende.

Ved teoremet om begrensethet fins

$$M = \sup V_f$$

Anta at $f(x) < M$ for alle $x \in [a, b]$. Da er funksjonen

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

kontinuerlig på $[a, b]$. Ved teoremet om begrensethet fins derfor et tall $c > 0$ slik at

$$g(x) < c \quad \text{for alle } x \in [a, b].$$

Altså

$$\frac{1}{M - f(x)} < c \text{ , som gir } f(x) < M - \frac{1}{c}$$
$$\text{for alle } x \in [a, b]$$

Dette strider mot definisjonen av M, fordi det viser at $M - \frac{1}{c}$ også er en øvre begrensning for V_f.

Altså har vi $f(x) = M$ for en $x \in [a, b]$.

Denne x-en blir da et maksimalpunkt. $\square$