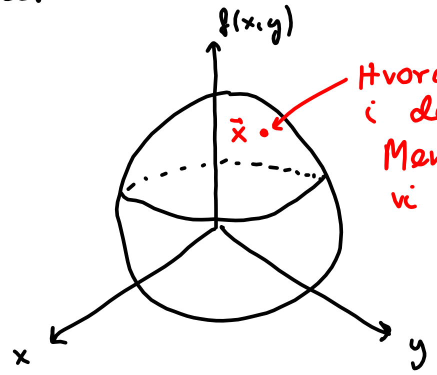
Derivasjon av skalarfelt 2.4

Vi kaller en funksjon $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for et skalarfelt.

Geometrisk tolkning

En variabel: $f'(x)$ måler hvor mye $f(x)$ endrer seg når vi beveger oss langs x-aksen.

Flere variable: La $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vi har nå n koordinatakser som vi kan bevege oss langs.



Hvordan endrer $f(x,y)$ seg i dette punktet. Men hvilken retning skal vi måle endringen i?

Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ måler hvor mye $f(\vec{x})$ endrer seg når vi går langs x_i-aksen.

Definisjon

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la $f: A \to \mathbb{R}$ og la $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ være et indre punkt i A (dvs. at det finnes en ε-ball $B(\vec{a}, \varepsilon) \subseteq A$). Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

den partiellderiverte av f med hensyn på x_i.

Merk: Dersom $n = 1$, så får vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

dette er en velkjent definisjon for $f'(a)$ i en variabel.

Hvis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $\vec{a} = (x,y)$ så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$ og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Eksempel: $f(x,y) = x^2y^7$, da er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2y^7 - x^2y^7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)y^7 - x^2y^7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2y^7} + 2xhy^7 + h^2y^7 - \cancel{x^2y^7}}{h}$$

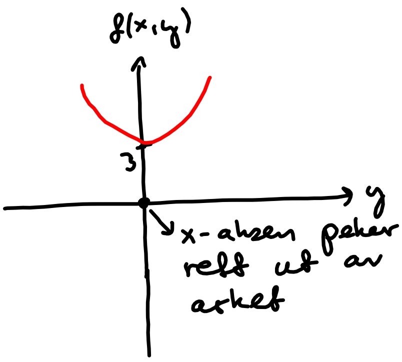
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2xy^7 + hy^7)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2xy^7 + hy^7 \quad (hy^7 \to 0)$$

$$= 2xy^7$$

Regneregel: Vi kan finne de partiellderivate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ved å oppfatte alle variable unntatt x_i konstante tall og derivere på vanlig måte med hensyn på x_i.

Eksempel: $f(x,y) = 3 + y^2$



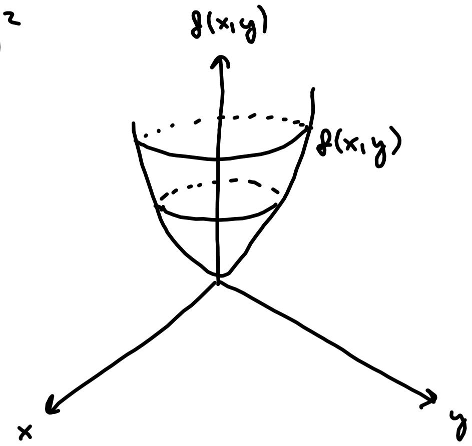
$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (Vi deriverer et "konstant" tall)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

Eksempel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$



Eksempel: $f(x,y,z) = \sin(z)x^3e^y + \cos(x^2)y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \cdot \sin(z)e^y + (-\sin(x^2) \cdot 2x \cdot y)$

$= 3x^2 \sin(z)e^y - 2x\sin(x^2) \cdot y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(z)x^3e^y + \cos(x^2)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos(z)x^3e^y + 0 = \cos(z)x^3e^y$

Eksempel

Finn en funksjon $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3$$

løsning:

- Vi later som at x er konstant og integrerer $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn på y:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \int x^3\, dy = x^3 \int 1\, dy = x^3y + g(x)$$

konstantledd når vi later som at x er konstant.

- Vi later som at y er konstant og integrerer $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på x:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int 3x^2y + 1\, dx$$

$$= x^3y + x + h(y)$$

Konstantledd når vi later som at y er konstant.

For å finne f(x,y) må vi finne g(x) og h(y) og vi gjør dette ved å sette de to integralene lik hverandre:

$$x^3y + g(x) = x^3y + x + h(y)$$

$$g(x) = x + h(y)$$

Vi ser at $h(y) = 0$ og $g(x) = x$ gir en gyldig løsning, som gir at $\underline{f(x,y) = x^3y + x}$.

($h(y) = k$ og $g(x) = x + k$ gir også gyldige løsninger).

Så $f(x,y) = x^3y + x$ er en løsning.

alternativ løsning: Vi ser at $f(x,y) = x^3y + x$ er en god kandidat og vi sjekker at det er en løsning ved å partiellderivere funksjonen:

Vi får at:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 0 = x^3$$

Dette stemmer og vi har funnet en løsning.

Høyere ordens partiellderiverte 2.5

La $f(x,y) = x^2y^3 + y^2$, vi har da at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 2y$$

Vi har at de andre ordens partiellderiverte er gitt ved:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 2x \cdot 3y^2 = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2x^2 + 2y) = 6y^2 \cdot x + 0 = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2x^2 + 2y) = 6yx^2 + 2$$

Generelt så har vi at $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ er den n'te ordens partiellderiverte av f, hvor vi først deriverer med hensyn på x_{i_1}, så med hensyn på x_{i_2}, osv.

Vi så i eksempelet over at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ var like, generelt så har vi følgende resultat:

Teorem

La $f(x_1, \dots, x_n)$ være en funksjon av n variable. Anta at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer i et omegn rundt punktet $\vec{a}$ og er kontinuerlige. Da er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a})$$

Bevis: Se boken s. 133.

Presisering: Formelt sett så er et omegn om $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ en delmengde av $\mathbb{R}^n$ som inneholder en kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ om $\vec{a}$ der $\varepsilon > 0$