Derivasjon av skalarfelt 2.4

Et skalarfelt er en funksjon $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definisjon

La $f: A \to \mathbb{R}$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ være et indre punkt i A, dvs. A er et omegn om $\vec{a}$.

① Den retningsderiverte av f langs vektoren $\vec{r} \in \mathbb{R}$ i punktet $\vec{a}$ er da

$$f'(\vec{a}; \vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

② Gradienten til f i punktet $\vec{a}$ er vektoren

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

Merk: Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ er den retningsderivente langs x_i-aksen, dvs. med retningsvektor $r = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.
↳ i'te plass

$$\boxed{\text{Mål: Vise at } f'(\vec{a}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}}$$

Motivasjon fra funksjoner f av en variabel

La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon.
Vi ser på feilleddet:

$$\sigma(h) = [f(x+h) - f(x)] - f'(x) \cdot h$$

Vi har da

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f'(x) \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

Definisjonen av den deriverte

$$= f'(x) - f'(x)$$

$$= 0$$

Altså går feilleddet $\sigma(h)$ mot 0 raskere enn h når $h \to 0$.
Vi ønsker å bruke denne egenskapen for å definere deriverbarhet av skalarfelt.

Definisjon

La $f: A \to \mathbb{R}$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$. f kalles deriverbar i et indre punkt $\vec{a} \in A$ hvis alle de partiellderiverte eksisterer og feilleddet

$$\sigma(\vec{r}) = [f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a})] - \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} \qquad (*)$$

oppfyller

$$\lim_{\vec{r} \to \vec{0}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$$

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\text{-stykker}})$

Teorem

Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$, så har vi at

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Bevis: Vi har at

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a}+h\cdot\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

Ved å bruke en omskrivning av $(*)$ med $h \cdot \vec{r}$ som $\vec{r}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\nabla f(\vec{a}) \cdot h\vec{r} + \sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\nabla f(\vec{a}) \cdot \cancel{h}\vec{r}}{\cancel{h}} + \frac{\sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} + \frac{\sigma(h\vec{r}) \cdot |\vec{r}|}{h|\vec{r}|}$$

$$= \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} + \lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h\vec{r})}{|h\vec{r}|} |\vec{r}|$$

går mot 0 fordi f er deriverbar.

$$= \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Teorem

La $f: A \to \mathbb{R}$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Hvis alle de partiell-deriverte eksisterer i et omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige, så er f deriverbar i $\vec{a}$.

Eksempel: La $f(x,y) = xy + 2y$, la $\vec{a} = (2,5)$ og la $\vec{r} = (2,1)$. Finn $f'(\vec{a};\vec{r})$.

Løsning: Vi har at $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$, så vi finner

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x+2)$, så

$\nabla f(\vec{a}) = (5, 2+2) = (5,4)$, til slutt må vi regne ut prikkproduktet med $\vec{r}$:

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = (5,4)\cdot(2,1) = 5 \cdot 2 + 4 = \underline{14.}$$

Så $f'(\vec{a};\vec{r}) = 14$.

Eksempel

La $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ og $\vec{a} = (1,1,1)$. Finn et eksempel på en retningsvektor $\vec{r}$ slik at $f'(\vec{a};\vec{r}) = 20$.

Løsningen: Vi har at $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$.

Vi finner $\nabla f(\vec{a})$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z), \text{ så}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = (2\cdot 1, 2\cdot 1, 2\cdot 1) = (2,2,2).$$

Vi må finne en $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ slik at

$$\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} = 20$$

$$(2,2,2)\cdot(r_1,r_2,r_3) = 20$$

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 20$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 10$$

Et eksempel på en slik retningsvektor er $\vec{r} = (10, 0, 0)$.

Teorem

La $f: A \to \mathbb{R}$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$, så peker gradienten $\nabla f(\vec{a})$ i den retningen hvor f vokser raskest ut fra punktet $\vec{a}$.

Bevis: Vi har at

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} = |\nabla f(\vec{a})|\cdot|\vec{r}|\cdot\cos(\theta)$$

vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\nabla f(\vec{a})$.

Vi bryr oss bare om retningen til $\vec{r}$, så vi kan anta at $|\vec{r}| = 1$, da får vi

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = |\nabla f(\vec{a})|\cdot\cos(\theta)$$

Faktoren $\cos(\theta)$ er størst når $\cos(\theta) = 1$, dette skjer når $\theta = 0$. Dvs. at vinkelen mellom den retningsvektoren som gir størst verdi og $\nabla f(\vec{a})$ er lik 0, så de peker i samme retning.

Vi kan konkludere med at $\nabla f(\vec{a})$ peker i den retningen som gir størst verdi for $f'(\vec{a};\vec{r})$. $\blacksquare$

Eksempel 1

Avgjør hvilken retning funksjonen $f(x,y,z) = xyz$ vokser raskest ut i fra punktet $(1,1,2)$.

Løsning: Vi vet at f vokser raskest langs gradienten $\nabla f(\vec{a})$, så vi finner $\nabla f(\vec{a})$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy), \text{ så}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \nabla f(1,1,2) = (1\cdot 2, 1\cdot 2, 1\cdot 1) = (2,2,1)$$

Altså vokser f raskest i retningen $(2,2,1)$.

Eksempel

Finn et eksempel på en funksjon $f(x,y,z)$ som vokser raskest ut fra punktet $(1,1,1)$ i retning $(5,3,2)$.

Løsning: Vi vet at funksjonen $f(x,y,z)$ vokser raskest i den retningen som gradienten peker. Så må finne en $f(x,y,z)$ slik at

$$\nabla f(1,1,1) = (5,3,2) \quad \text{dvs.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2$$

Vi ser at $\nabla f = (5x, 3y, 2z)$ tilfredsstiller likningene over. Så vi ønsker å finne en $f(x,y,z)$ slik at $\nabla f = (5x, 3y, 2z)$.

$$\text{I)} \quad f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int 5x\,dx = \frac{5}{2}x^2 + g_1(y,z)$$

$$\text{II)} \quad f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \int 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2 + g_2(x,z)$$

$$\text{III)} \quad f(x,y,z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \int 2z\,dz = z^2 + g_3(x,y)$$

Vi samler leddene i I, II og III for å finne en løsning for $f(x,y,z)$. Vi får da at $f(x,y,z) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2$ gir en løsning.

Vi kan konkludere med at $f(x,y,z) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2$ er et eksempel på en funksjon som vokser raskest i retning $(5,3,2)$ fra punktet $(1,1,1)$.

Eksempel

Finn en funksjon $f(x,y)$ slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x+1$$

løsning:

I) $f(x,y) = \int y \, dx = yx + \underbrace{g_1(y)}_{=y}$

II) $f(x,y) = \int x+1 \, dy = xy + y + \underbrace{g_2(x)}_{=0}$

Vi samler leddene i I og II og får at

$f(x,y) = xy + y$ er en løsning.

OBS! I eksempel 1 kan det hende at vi velger en "gradient" $\vec{v}$ slik at det ikke finnes noen funksjon f slik at $\nabla f = \vec{v}$. Vi kan unngå dette ved å alltid velge $\vec{v}$ slik at x-koordinaten bare avhenger av variabelen x, y koordinaten bare avhenger av y, osv.