# Derivasjon av vektorevaluerte funksjoner

## 2.6

En vektorevaluert funksjon av n variable

$$\vec{F}: A \longrightarrow \mathbb{R}^{m}, \quad \text{der } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

**Definisjon**
La $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, og la $\vec{a} \in A$ være et indre punkt. Jacobi-matrisen til $\vec{F}$ er da gitt ved

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

der $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$. Funksjonene $F_1, \ldots, F_n$ kalles komponentfunksjonene til $\vec{F}$.

Eksempel: La $\vec{F}(x,y,z) = (x^2yz, xy^3)$, $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
Jacobi-matrisen til $\vec{F}$ er da gitt ved:

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ y^3 & 3y^2x & 0 \end{pmatrix}$$

Eksempel: $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x + 4y \end{pmatrix} \end{array} = (\underbrace{2x+3y}_{F_1}, \underbrace{-x+4y}_{F_2})$$

Jacobi-matrisen til $\vec{F}$ er:

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi får tilbake matrisen som vi startet med!

Generelt:
En variabel: $f(x) = ax$, så er $f'(x) = a$.
Flere variabler: $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$, så er $\vec{F}'(\vec{x}) = A$.

## Definisjon

La $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La $\vec{a} \in A$ være et indre punkt. Vi sier at $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ dersom de partiellderiverte eksisterer og

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \left[\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a})\right] - \underbrace{\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}}$$

produktet av en matrise og en vektor.

oppfyller

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{\vec{\sigma}(\vec{r})}{|\vec{r}|} = \vec{0} \quad (= (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^m)$$

tolkning:

At $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ betyr at

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) \approx \vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

er en god tilnærming når $\vec{r}$ er liten.

Analogien til dette i en variabel er at

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a)\cdot h$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a)$$

er en god tilnærming nå $h$ er liten.

## Teorem

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$. En funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ av $n$ variable er deriverbar i $\vec{a}$ hvis og bare hvis komponentfunksjonene $F_1, \dots, F_n$ er deriverbare i $\vec{a}$.

<u>Bevis:</u> Vi må vise $\frac{\vec{\sigma}(\vec{r})}{|\vec{r}|} \to \vec{0}$ når $\vec{r} \to 0$.

Vi har at

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \left[\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a})\right] - \underbrace{\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}}_{\text{matriseprodukt}}$$

Vi har at

$$\vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a})\cdot r_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a})\cdot r_m \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a})\cdot r_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a})\cdot \vec{r}_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla F_1(\vec{a})\cdot\vec{r} \\ \vdots \\ \nabla F_m(\vec{a})\cdot\vec{r} \end{pmatrix}$$

Vi får dermed at hver komponent i $\vec{\sigma}(\vec{r})$ er gitt ved

$$\sigma_i(\vec{r}) = \underbrace{\left[F_i(\vec{a}+\vec{r}) - F_i(\vec{a})\right] - \nabla F_i(\vec{a})\cdot\vec{r}}_{\text{Feilleddet for skalarfeltet } F_i\text{, som vi så på i går.}}$$

Dermed får vi

$$\frac{\vec{\sigma}(\vec{r})}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(\vec{r})}{|\vec{r}|} \\ \frac{\sigma_2(\vec{r})}{|\vec{r}|} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_m(\vec{r})}{|\vec{r}|} \end{pmatrix} \xrightarrow[r\to 0]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hvis og bare hvis hver komponent $\frac{\sigma_i(\vec{r})}{|\vec{r}|} \to 0$, dvs. hvis og bare hvis hver komponentfunksjon $F_i$ er deriverbar i punktet $\vec{a}$.

**Korollar**

Anta at $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\vec{a} \in A$ er et indre punkt. Hvis alle komponentene i Jacobi-matrisen er definert i et omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige, så er $\vec{F}$ deriverbar i $\vec{a}$.

Bevis: Følger av å sette sammen teoremet over med det analoge resultatet for skalarfelt fra i går. $\blacksquare$

## Eksempel

Finn et eksempel på en funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ slik at Jacobimatrisen til $\vec{F}$ er gitt ved

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 & 3xy^2 \\ e^{x+y^2} & 2ye^{x+y^2} \\ 6xy & 3x^2 \end{pmatrix}$$

## Løsning:

Vi vet at Jacobimatrisen er gitt ved de partiellderiverte av $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 & 3xy^2 \\ e^{x+y^2} & 2ye^{x+y^2} \\ 6xy & 3x^2 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne en løsning for $F_1$, $F_2$ og $F_3$ hver for seg:

$F_1$: $\frac{\partial F_1}{\partial x} = y^3$ og $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3xy^2$

Vi integrerer for å finne formlene for $F_1(x,y)$:

I) $F_1(x,y) = \int \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx = \int y^3\, dx = y^3 x + \underbrace{h(y)}_{\text{konstantledd}}$

II) $F_1(x,y) = \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy = \int 3xy^2\, dy = y^3 x + g(x)$

Ved å samle leddene ser vi at $F_1(x,y) = y^3 x$ er en løsning.

$F_2$: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{x+y^2}$ og $\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}$

I) $F_2(x,y) = \int \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx = \int e^{x+y^2}\, dx$

$$= \int e^x \cdot e^{y^2}\, dx = e^x \cdot e^{y^2} + h(y)$$

$$= e^{x+y^2} + h(y).$$

II) $F_2(x,y) = \int \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dy = \int 2y e^{x+y^2}\,dy$

$$= \int \cancel{2y} \cdot e^u \frac{du}{\cancel{2y}} = \int e^u\,du = e^u + C$$

Ved substitusjon med $u = x+y^2$

$$= e^{x+y^2} + g(x).$$

Ved å samle leddene får vi at $F_2(x,y) = e^{x+y^2}$ er en løsning.

$F_3$: $\frac{\partial F_3}{\partial x} = 6xy$ og $\frac{\partial F_3}{\partial y} = 3x^2$

Vi ser at $F_3(x,y) = 3x^2y$ er en løsningsfunksjon.

Vi har dermed funnet et eksempel

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^3x \\ e^{x+y^2} \\ 3x^2y \end{pmatrix}$$

som har Jacobi-matrise som oppgaven ba om.