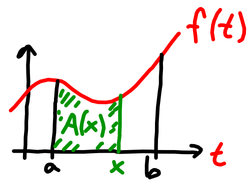
Korollar av fundamentalteoremet

Hvis F og f er kontinuerlige på $[a,b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$$

Bevis Ved fundamentalteoremet vet vi at

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



oppfyller $A'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, og at $A(x)$ er kontinuerlig på $[a,b]$. Så $F(x) = A(x) + C$ for alle $x \in [a,b]$, der C er et konstant tall (Lemma 8.3.2). Dermed:

$$F(b) - F(a) = [A(b) + \cancel{C}] - [A(a) + \cancel{C}]$$
$$= A(b) - \underbrace{A(a)}_{0} = A(b) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \square$$

8.4 Det ubestemte integralet

Vi definerer det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx$$

til å være den "generelle antideriverte" til $f(x)$. Hvis $F'(x) = f(x)$, er altså

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

der C er en konstant.

Regler for ubestemte integraler

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Husk at: $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a) \cdot x}$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C \quad , \text{ der } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

varianter fins også for arccos og arccot

Integrasjon ved substitusjon (setning 8.4.5)

Anta at g er deriverbar, at f er kontinuerlig og at F er en antiderivert av f. Da er

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Bevis Den deriverte av $F(g(x)) + C$ er (kjerneregelen):

$$F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad \square$$

Hvordan bruke substitusjon

1. Finn en kjerne $u(x)$ i integralet
2. Regn ut:
$$\frac{du}{dx} = u'(x) \, , \quad du = u'(x) \, dx \, , \quad dx = \frac{1}{u'(x)} \, du$$
3. Sett inn for u og dx i integralet. Metoden fungerer hvis alle x-ene forsvinner.

Eks.

$$\int x e^{x^2}\,dx = \int \cancel{x}\cdot e^{u}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^2 & \frac{du}{dx} = 2x \\ du = 2x\cdot dx & dx = \frac{1}{2x}\,du \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{u} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}}$$

Eks.

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{u}{\cancel{1+x^2}}\,(\cancel{1+x^2})\,du = \int u\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \arctan x & \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx & dx = (1+x^2)\,du \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C}}$$

8.5 Riemannsummer

Gitt en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ av $[a,b]$.

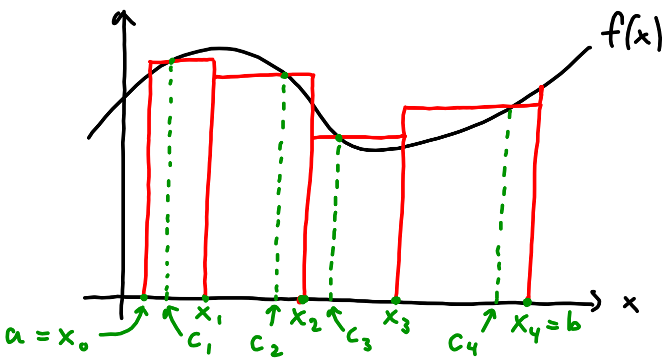
$\mathcal{U} = \{c_1, \dots, c_n\}$ kalles et utvalg for Π hvis

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ for alle } i$$

Definisjon 8.5.1 (Riemannsum)

La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Riemannsummen for f på $[a,b]$ tilsvarende Π og $\mathcal{U}$ er

$$R(\Pi, \mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \quad \text{der} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Her er $n = 4$

$\Pi = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

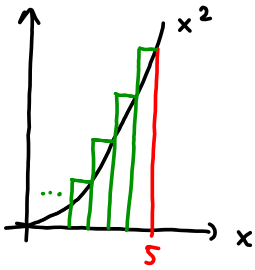
$\mathcal{U} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

Eks. La $f(x) = x^2$. Finn $\int_0^5 f(x)\,dx$ ved Riemannsummer.

Løsn. Π_n : Partisjon av $[0,5]$ med n like lange delintervaller.

c_i : Høyre endepunkt i hvert delintervall.

Vil finne $R(\Pi_n, U_n)$



$\Delta x_i = \frac{5}{n}$ for alle i

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = n \cdot \frac{5}{n} = 5$

$x_1 = \frac{5}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{5}{n}$ osv.

$$R(\Pi_n, U_n) = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n$$

$\boxed{c_i = x_i \text{ for alle } i}$

$$= f(x_1)\cdot\frac{5}{n} + f(x_2)\cdot\frac{5}{n} + \ldots + f(x_n)\cdot\frac{5}{n}$$

$$= x_1^2\cdot\frac{5}{n} + x_2^2\cdot\frac{5}{n} + \ldots + x_n^2\cdot\frac{5}{n}$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} + \left(2\cdot\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} + \ldots + \left(n\cdot\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n}$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^3 + 2^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^3 + \ldots + n^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^3$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^3 \underbrace{\left[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right]}_{\text{Dette har vi en formel for: } \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^3 \cdot \left[\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right]$$

$$= 5^3 \cdot \left[\frac{1}{3} + \underset{\to 0}{\frac{1}{2n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{6n^2}}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{125}{3}$$

Og vi har $\int_0^5 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{125}{3}$!