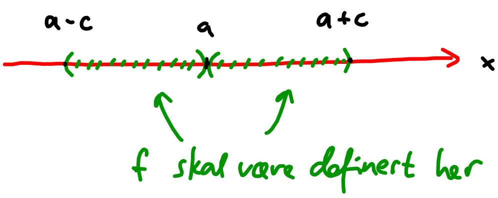
Grenseverdier (5.4)

At f er definert i nærheten av a betyr at det fins et tall $c > 0$ slik at

$$(a-c,\, a) \cup (a,\, a+c) \subseteq D_f$$



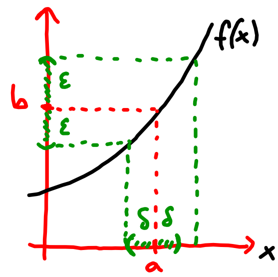
Definisjon av grense

Anta at f er definert i nærheten av a. At

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

betyr at det for alle $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

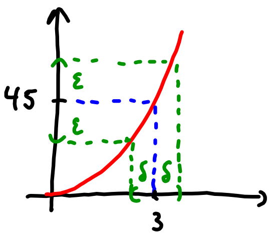


Teknikk for å bruke definisjonen til å vise at $\lim_{x \to a} f(x) = b$:

1. Finn avstanden $|f(a+h) - b|$ (setter $x = a+h$)
2. Sett avstanden mindre enn ε, og løs med hensyn på h

Eks. Vis at $\lim_{x \to 3} 5x^2 = 45$ ved å bruke definisjonen av grense.

Løsn. La $f(x) = 5x^2$. Har da $f(3) = 5 \cdot 3^2 = 45$



Har $f'(x) = 10x$

$f'(3) = 10 \cdot 3 = 30$

Så $\delta = \frac{\varepsilon}{30}$ kanskje ?

① $|f(a+h) - b| = |f(3+h) - 45|$ $\quad (x = a+h = 3+h)$

$$
\begin{aligned}
&= |5 \cdot (3+h)^2 - 45| \\
&= |5 \cdot (9 + 6h + h^2) - 45| \\
&= |\cancel{45} + 30h + 5h^2 - \cancel{45}| \\
&= |30h + 5h^2| = |h(30+5h)|
\end{aligned}
$$

② Vi vil ha $|h(30+5h)| < \varepsilon$.

Vi tenker i to trinn. Første trinn er å anta at $|h| < 1$.

I så fall er

$$|h(30+5h)| < |h \cdot (30 + 5 \cdot 1)| = |35h| = 35 \cdot |h|$$

Trinn 2 er at vi kan få dette mindre enn ε ved å velge h slik at

$$35 \cdot |h| < \varepsilon \quad , \quad \text{dvs.} \quad |h| < \frac{\varepsilon}{35}$$

Kan da velge δ slik at $\delta < 1$ og $\delta < \frac{\varepsilon}{35}$. □

Regneregler for grenseverdier (5.4.3)

Hvis $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ begge fins, har vi:

(i) $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (gitt at $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$)

Bevis Tilsvarende som beviset for setning 5.1.4. $\square$

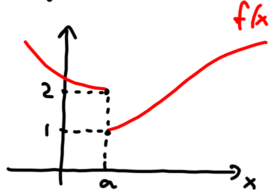
Eks. Finn $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{x}$

Løsn. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{x} \overset{\text{triks}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}+1}{1}$ (Vet: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$\overset{(iv)}{=} \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)}{\lim_{x\to 0} 1} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} 1} = \frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Ensidige grenser

Eks.



$\lim_{x\to a^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = 2$

Formelle definisjoner av ensidige grenser:
Tilsvarende definisjonen av "tosidig" grense. Se bok.

Observasjon (5.4.7)

La $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, dvs. $D_f = [a,b]$ og $V_f \subseteq \mathbb{R}$

For alle $c \in (a,b)$ gjelder da

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \iff f$ er kontinuerlig i $x = c$.

Videre:

$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \iff f$ er kontinuerlig i $x = b$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \iff f$ er kontinuerlig i $x = a$

Eks. Vis at

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{for } x > 0 \\ 1 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsn. Vi må vise at $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Dette er det samme som å vise at

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

Vel, vi har:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}} = 1$$

Altså $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Så f er kontinuerlig i $x = 0$. $\square$

Eksempel på formell definisjon av en annen type grense

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ betyr

For alle N fins M slik at

$$x > M \Rightarrow f(x) > N$$