Maskevidden til en Riemannsum : Største bredde Δx_i

8.5.3 Integraler som grense for Riemannsummer

La f være begrenset på $[a,b]$. Da er f integrerbar på $[a,b]$ med integral I hvis og bare hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at alle Riemannsummer R for f på $[a,b]$ med maskevidde mindre enn δ oppfyller $|R - I| < \varepsilon$.

Bevis : Se bok.

To typiske "fundamentalteoremoppgaver"

Eks. 1 $f(x) = \int_0^x t^3 dt$, finn $f'(x)$.

Løsn. $f'(x) = \underline{\underline{x^3}}$

Eks. 2 $f(x) = \int_0^{\sin x} t^3 \, dt$, finn $f'(x)$.

Løsn. La $g(x) = \int_0^x t^3 dt$. Da er $g'(x) = x^3$.

Videre er $f(x) = g(\sin x)$. Så kjerneregelen gir

$$f'(x) = g'(\sin x) \cdot \cos x = \underline{\underline{(\sin x)^3 \cdot \cos x}}$$

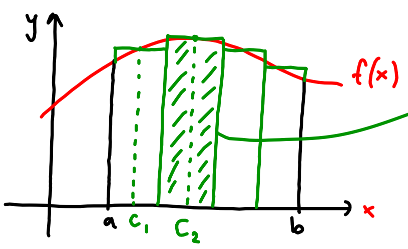
Anvendelser av integralet (8.6)

Omdreiningslegeme om x-aksen

Anta at f er kontinuerlig og ikke-negativ på $[a,b]$.
Volumet av legemet vi får når området under grafen til f på $[a,b]$ roteres om x-aksen, er

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

Begrunnelse



alle rektanglene har samme bredde Δx

Når vi roterer, gir dette rektanglet en sylinderformet skive med radius $f(c_2)$ og tykkelse Δx

Volumet av skiven:

$$\Delta V_2 = \text{grunnflate} \cdot \Delta x = \pi \cdot \left[f(c_2)\right]^2 \cdot \Delta x$$

Summen av volumet til alle skivene blir

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot \left[f(c_i)\right]^2 \cdot \Delta x$$

Dette er en Riemannsum for funksjonen $\pi \cdot \left[f(x)\right]^2$ på $[a,b]$.
Så

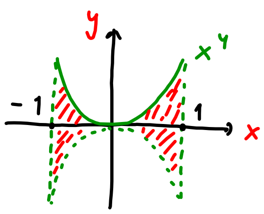
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot \left[f(c_i)\right]^2 \cdot \Delta x$$

$\boxed{\text{Vet dette, fordi } n\to\infty \text{ gir } \Delta x \to 0}$

$$= \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx \qquad \square$$

Eks. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når grafen til $f(x) = x^4$ på $[-1,1]$ dreies om x-aksen.

Løsn.



$$V = \int_{-1}^{1} \pi \cdot \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi \left(x^4\right)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{9}x^9\right]_{-1}^{1}$$

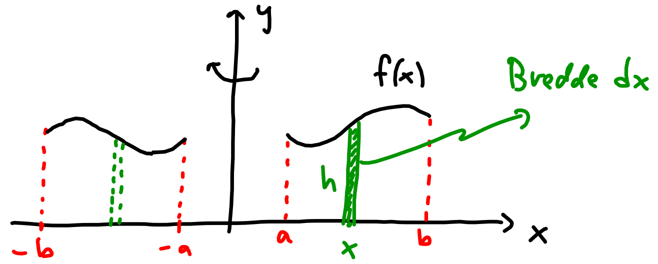
$$= \pi \left[\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right)\right] = \underline{\underline{\frac{2\pi}{9}}}$$

Omdreiningslegeme om y-aksen

Anta at f er kontinuerlig og ikke-negativ på $[a, b]$, der $a \geq 0$.
Volumet av legemet vi får når området under grafen til f på $[a, b]$ roteres om y-aksen, er

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

Intuitiv forklaring ("fysikerbevis")



Nå den roteres, gir den skraverte grønne stripen et sylinderskall med radius x og høyde $h = f(x)$

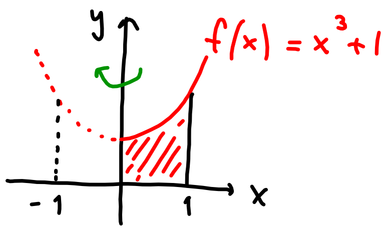
Sylinderskallet har altså

$$\text{areal} = \text{omkrets} \cdot \text{høyde} = 2\pi x \cdot f(x)$$
$$\text{volum} \approx \text{areal} \cdot \text{tykkelse} = 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx = dV$$

"Summerer": $V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)\, dx$. $\square$

Eks. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til $f(x) = x^3 + 1$ på $[0, 1]$ roteres om y-aksen.

Løsn.



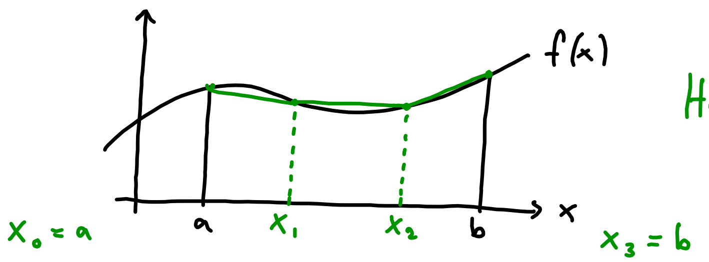
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot (x^3 + 1)\, dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 (x^4 + x)\, dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right] = 2\pi \cdot \frac{7}{10} = \underline{\frac{7\pi}{5}}$$

Lengden av grafen til en funksjon f på et intervall $[a,b]$

Vi lager en partisjon

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Så måler vi lengden av linjestykket fra $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ til punktet $(x_i, f(x_i))$ på grafen for hver i, og summerer.



Her er $n = 3$.

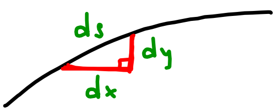
Vi definerer lengden av grafen til f på $[a,b]$ som minste øvre skranke (supremum) for mengden av lengdeanslag vi får på denne måten.

Teorem (graflengde)

Hvis $f'(x)$ er kontinuerlig på $[a,b]$, så er lengden s av grafen til f på $[a,b]$ gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Fysikerbevis



Pytagoras:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

så $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$\text{Så } s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \cdot dx^2}$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \sqrt{dx^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad \square$$