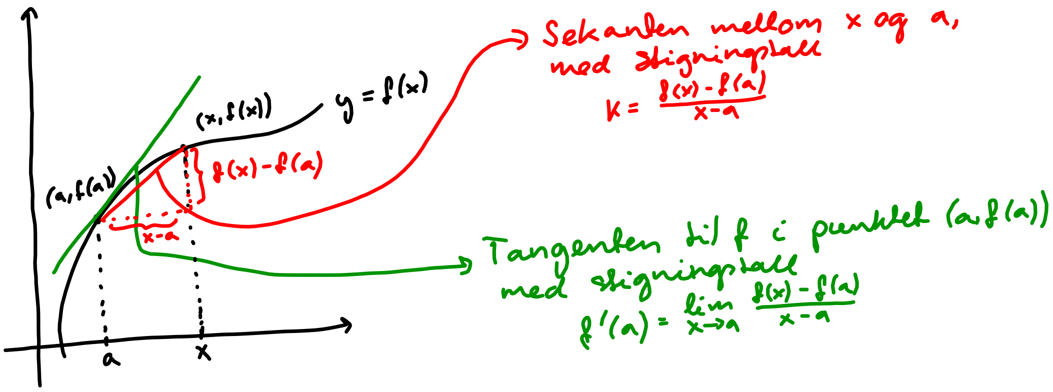
Derivasjon 6.1

Idéen:



Definisjon

Dersom grensen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

eksisterer, så sier vi at f er deriverbar i punktet a, i så fall sier vi at

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

er den deriverte til f i punktet a.

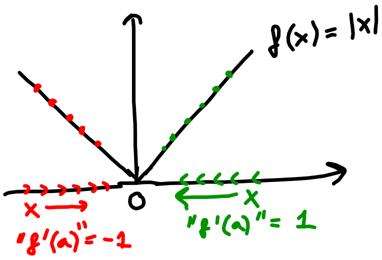
Setning

Dersom f er deriverbar i punktet a, så er f kontinuerlig i punktet a.

Fakta: Det motsatte holder ikke! Det finnes funksjoner som er kontinuerlige overalt men som har punkter hvor de ikke er deriverbare.

Eksempel: $f(x) = |x|$

f er kontinuerlig i punktet 0, men ikke deriverbar i punktet.



Derivasjonsregler: en rask repetisjon

Spesielle:

$$c' = 0 \qquad (c \text{ er konstant})$$

$$(x^a)' = a x^{a-1} \qquad (a \text{ er konstant})$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln(|x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{hvor } x \neq 0$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \tan^2(x) + 1$$

Generelle:

$$(c f(x))' = c f'(x) \qquad (c \text{ er konstant})$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad g(x) \neq 0$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Eksempel:

$$f(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x)$$

$$= e^{x^2} \cdot 2x \cdot \sin(x) + e^{x^2} \cdot \cos(x)$$

$$= e^{x^2}(2x\sin(x) + \cos(x)).$$

Logaritmisk derivasjon

Setning
Dersom f er deriverbar i x og $f(x) \neq 0$, så har vi at $f'(x) = f(x) \cdot (\ln(|f(x)|))'$.

Bevis: Vi bruker kjerneregelen på $\ln(|f(x)|)$:

$$(\ln(|f(x)|))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \implies f'(x) = f(x)(\ln(|f(x)|))'.$$

Eksempel

$f(x) = \cos(x)^{10} \cdot \sin(x)^{18} \cdot x^4$

$\ln(f(x)) = \ln(\cos(x)^{10} \cdot \sin(x)^{18} \cdot x^4)$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$= \ln(\cos(x)^{10}) + \ln(\sin(x)^{18}) + \ln(x^4)$

$\ln(a^b) = b\ln(a)$

$= 10\ln(|\cos(x)|) + 18\ln(|\sin(x)|) + 4\ln(|x|)$

Vi får at

$$(\ln(f(x)))' = 10\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) + 18\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) + 4 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 18\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 10\tan(x) + \frac{4}{x}$$

Ved logaritmisk derivasjon får vi da at:

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln(|f(x)|))'$$
$$= \cos(x)^{10} \sin(x)^{18} \cdot x^4 \left(18\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 10\tan(x) + 4/x\right).$$

Eksempel

Vi kan også bruke logaritmisk derivasjon til å derivere uttrykk på formen $g(x)^{h(x)}$:

La $f(x) = x^x$ hvor $x > 0$, vi får da at

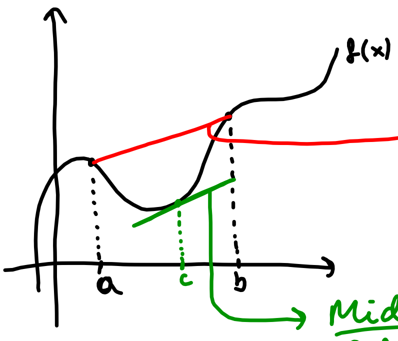
$$f'(x) = f(x)(\ln(f(x)))'$$
$$= x^x(\ln(x^x))'$$

$\ln(a^b) = b\ln(a)$

$$= x^x(x\ln(x))'$$
$$= x^x(\ln(x) + \cancel{x} \cdot 1/\cancel{x})$$
$$= x^x(\ln(x) + 1).$$

Middelverdisetningen 6.2

Geometrisk tolkning:



Sekanten med stigningstall $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Middelverdisetningen:
Det eksisterer en c mellom a og b, slik at tangenten i punktet c er parallell med sekanten mellom a og b:
dvs. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorem (Middelverdisetningen)
Anta $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og anta at f er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a,b)$.
Da finnes en $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Lemma
Anta at $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, og anta at f har et maksimum eller minimum i et indre punkt $c \in (a,b)$. Dersom f er deriverbar i c så er $f'(c)=0$.

Teorem (Rolles teorem)
Anta at $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Vi antar videre at $f(a) = f(b) = 0$. Da finnes et punkt $c \in (a,b)$ slik at $f'(c)=0$.

Bevis for Rolles teorem:

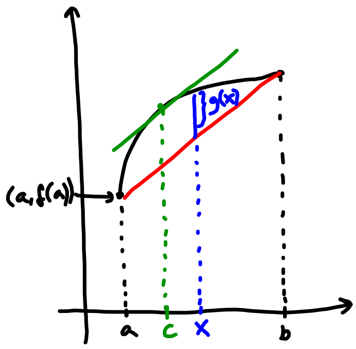
I følge ekstremalverdisetningen så har f et maksimum- og minimumspunkt i $[a,b]$.

Vi har da to mulige senarioer:

I) Både maksimum og minimum befinner seg i endepunktene a eller b. Da får vi at både maksimums- og minimumsverdien til f er lik null. dvs. $f=0$, dermed er $f'(c)=0$ for alle $c \in (a,b)$, så vi kan avslutte beviset.

II) Minst et av ekstremalpunktene ligger i et indre punkt $c \in (a,b)$. Da har vi i følge lemmaet over at $f'(c)=0$, så vi kan ~~kan~~ avslutte beviset.

Bevis for middelverdisetningen



Vi vil lage en ny funksjon $g(x)$ som tilfredsstiller kriteriene i Rolles teorem. Vi definerer

$$g(x) = f(x) - \text{likningen til sekanten i } x.$$

Vi finner likningen for sekanten til f mellom a og b:

Vi bruker ettpunktsformelen:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Det gir oss at

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Vi vet at $g(a) = g(b) = 0$, så i følge Rolles teorem finnes det et indre punkt $c \in (a,b)$ slik at $g'(c)=0$.

Vi finner $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ved å sette inn c får vi da at

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hvorfor middelverdisetningen nyttig?

Vi vet at dersom f er konstant så er $f'(x)=0$ for alle x.

Setning
Gitt et intervall I og en deriverbar funksjon $f(x)$ på I slik $f'(x)=0$ for alle $x \in I$.
Da er f konstant på I.

Bevis: Se i boka.