L'Hopitals regel 6.3

Vi skal finne grenseverdier på formen

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \to b}{g(x) \to c} = \frac{b}{c}$$

Hvordan kan vi regne ut "$\frac{0}{0}$"-uttrykk?
Dvs. en grenseverdi $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ der
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Fakta: Grenseverdien til "$\frac{0}{0}$"-uttrykk varierer, den kan være 0, eller ∞, eller et tall mellom 0 og ∞.

Teorem (L'Hopitals regel for "$\frac{0}{0}$"-uttrykk)

Anta at f og g er deriverbare i et omegn om a, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ og at $g(x) \neq 0$ tilstrekkelig nærme a.
Anta videre at

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eksisterer. Da eksisterer grenseverdien $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, og vi har at

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \to \infty$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

ADVARSEL: Det kan hende at $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ikke eksisterer, selv om $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ gjør det.
Se eksempel 6.3.6 på s. 300 i boka.

Utvidelser av L'Hopitals regel

L'Hopitals regel fungerer også dersom:

- $a = \infty$ eller $a = -\infty$.
- Vi tar ensidige grenser $\lim_{x \to a^+}$ eller $\lim_{x \to a^-}$.

  Eksempel: $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- Vi har "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk. Dvs. grenseverdier på formen $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, hvor $\lim_{x\to a} f(x) = \pm \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
- Vi dropper antagelsen om at f og g er deriverbare i a.

Eksempel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Vi skal bruke en generalisering av middelverdisetningen for å vise L'Hopitals regel for "$\frac{0}{0}$"-uttrykk.

Teorem (Cauchys middelverdisetning)

Anta at $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige funksjoner og er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Da finnes en $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Merk: $g(x) = x$ så får vi middelverdisetningen.

Bevis for Cauchys middelverdisetning

Vi bruker middelverdisetningen på

$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$

I følge middelverdisetningen må det eksistere en $c \in (a,b)$ slik at

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a}$$

$$= \frac{(g(b)-g(a)) \cdot f(b) - (f(b) - f(a))g(b) - ((g(b)-g(a))f(a) - (f(b)-f(a))g(a))}{b-a}$$

$$= \frac{\cancel{g(b)f(b)} - \cancel{g(a)f(b)} - \cancel{f(b)g(b)} + \cancel{f(a)g(b)} - \cancel{g(b)f(a)} + \cancel{g(a)f(a)} + \cancel{f(b)g(a)} - \cancel{f(a)g(a)}}{b-a}$$

$$= 0$$

Dette gir oss at

$$0 = h'(c) = (g(b)-g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$$

$$\Longrightarrow \quad (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bevis for L'Hopitals regel for "$\frac{0}{0}$"

Vi må vise at dersom $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

og $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$ (hvor vi tillater at $L=\infty$ eller $L=-\infty$)

så er $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Vi bruker Cauchys middelverdisetning på intervallet $[a,x]$ (hvor x ligger nærme nok a til at vi har deriverbarhet på intervallet).

I følge Cauchys middelverdisetning finnes det da en $c \in (a,x)$ slik at

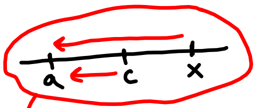
$$\frac{f(x) - \underbrace{f(a)}_{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Vi tar grenseverdien $\lim_{x\to a}$ på begge sider:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Når x går mot a, må c gå mot a, siden c ligger mellom a og x.



$$= \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$= L.$$

Andre ubestemte uttrykk

Hvordan kan vi regne ut uttrykk på formen "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0".

Eksempel "$0 \cdot \infty$"

Vi vil finne grenseverdien

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty}$$

Vi kan omformulere til et "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk på følgende måte:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot \ln(x)}{1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x} \cdot \ln(x)}{\frac{\cancel{x}}{1/x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x) \to -\infty}{1/x \to \infty}$$

Vi kan nå bruke L'Hopitals regel til å finne grenseverdien:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x^2/x = \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$$

Triks: Gjøre om "$0 \cdot \infty$"-uttrykk til "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk ved å dele på et av produktene over og under brøkstreken.

Eksempel: "$\infty - \infty$"

Vi vil finne grenseverdien $\lim_{x \to \infty} (\underbrace{x e^{1/x}}_{\to \infty} - \underbrace{x}_{\to \infty})$

Vi omformulerer uttrykket ved å faktorisere ut x fra parantesen:

$$\lim_{x \to \infty} (x e^{1/x} - x) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{x}_{\to \infty} \underbrace{(\underbrace{e^{1/x}}_{e^0 = 1} - 1)}_{\to 0}$$

Vi har nå et "$0 \cdot \infty$"-uttrykk og kan bruke samme trikset som istad:

$$\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} \cdot \cancel{-1/x^2}}{\cancel{-1/x^2}} = \lim_{x \to \infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Triks: Finne en felles faktor som kan settes utenfor, slik at vi får et "$0 \cdot \infty$"-uttrykk. Deretter bruke trikset for "$0 \cdot \infty$".

Eksempel: "1^∞"

Vi skal finne $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. For å finne grenseverdien så skriver vi

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x} = e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$e^{\ln(f(x))} = f(x)$

Siden e er kontinuerlig får vi at

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Dermed trenger vi bare å regne ut

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\underbrace{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}_{\ln(1)=0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+2/x\right)}\cdot\cancel{\frac{-2}{x^2}}}{\cancel{-1/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+2/x} = 2.$$

Dermed får vi at grenseverdien blir

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^2.$$