Denne uken: Baklengs repetisjon av pensum

$\boxed{\text{Skalarfunksjoner av } n \text{ variable}}$

$f : A \to \mathbb{R}$ der $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- Gradient : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

- Retningsderivert av f langs vektoren $\vec{r}$ ut fra punktet $\vec{a}$:

$$f'(\vec{a}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Funksjonsverdien til f øker raskest ut fra $\vec{a}$ i den retningen som gradienten til f, altså $\nabla f(\vec{a})$, peker.

Eks. $f(x,y,z) = 5x \cdot \cos y \cdot \arctan z + x + e^y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 \cos y \cdot \arctan z + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x \cdot \arctan z \cdot (-\sin y) + e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5x \cdot \cos y \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

$$\nabla f(0,0,0) = (1,1,0)$$

Så $(1,1,0)$ er retningen der f øker raskest ut fra $(0,0,0)$.

La $\vec{r} = (5, 17, 13)$. Da :

$$f'(\vec{0}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{0}) \cdot \vec{r} = (1,1,0) \cdot (5, 17, 13) = \underline{\underline{22}}$$

Eks. Finn et eksempel på en funksjon $f(x,y,z)$ slik at

$$\nabla f = (2xy,\ x^2 + z,\ y)$$

Løsn. Vi må ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \rightsquigarrow \quad x^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z \quad \rightsquigarrow \quad x^2 y + zy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \quad \rightsquigarrow \quad yz$$

Velger : $f(x,y,z) = \underline{\underline{x^2 y + yz}}$

$\boxed{\text{Vektorfunksjoner av } n \text{ variable}}$

$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- Jacobimatrise : $\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

der $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)$

Eks. $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{x^5 y^6}_{F_1}, \underbrace{e^{xy}}_{F_2})$ Her: $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $n = m = 2$

$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 5x^4 y^6$ $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6x^5 y^5$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{xy} \cdot y$ $\frac{\partial F_2}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$

Så: $\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 5x^4 y^6 & 6x^5 y^5 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$

$$\vec{F}'(2,1) = \begin{pmatrix} 80 & 192 \\ e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at for (x,y) nær $(2,1)$ vil

$$\vec{F}(x,y) \approx \vec{F}(2,1) + \vec{F}'(2,1) \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= (32, e^2) + \begin{pmatrix} 80 & 192 \\ e^2 & 2e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

være en god tilnærming til $\vec{F}(x,y)$ (lineærtilnærming)

Analogi for funksjoner f av en variabel:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x-a) .$$

$\boxed{\text{Matriser og determinanter}}$

Eks. Arne driver med kattoppdrett.

x_n : Antall kattunger i år

y_n : " unge katter i år

z_n : " voksne katter i år

Alle kattunger overlever til neste år, og er da unge katter.

–"– unge katter — " — " — voksne katter.

Alle voksne katter blir solgt, og er dermed borte neste år.

Modell: Hver voksen katt gir opphav til to nye kattunger neste år.

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{antall kattunger neste år}) = 2z_n = 0x_n + 0y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = (\text{– " – unge katter – " –}) = x_n = 1x_n + 0y_n + 0z_n \\ z_{n+1} = (\text{– " – voksne katter – " –}) = y_n = 0x_n + 1y_n + 0z_n \end{cases}$$

Så

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{overgangsmatrisen } M \text{ i modellen.}} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0$$

$M^2 = M \cdot M$: To år fremover

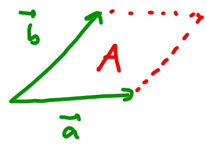
$M^3 = M^2 \cdot M$: Tre — " —

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \neq 0$$

M^{-1} : Den inverse av M : Fins hviss $\det(M) \neq 0$ (hvis og bare hvis)

Vektorprodukt



- Husk at $|\vec{a} \times \vec{b}|$ er arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- Husk også at absoluttverdien av

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

er volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.
Pyramiden utspent av dem er $\frac{1}{6}$ av dette.
$\rightarrow$ Tolkning av determinanten som forstørrelsesfaktor.

Regning med n-tupler (vektorer i $\mathbb{R}^n$)

- Følger regneregler for vektorer i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$
- Men husk at vi også definerte skalarprodukt for komplekse vektorer, altså vektorer i $\mathbb{C}^n$.

eks. $\vec{z} = (2i, 5+2i)$ og $\vec{w} = (2+i, -5i)$ gir

$$\vec{z} \cdot \vec{w} \overset{\text{def}}{=} z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2}$$

$$= 2i(2-i) + (5+2i) \cdot 5i$$

$$= 4i + 2 + 25i - 10$$

$$= \underline{\underline{-8 + 29i}}$$