I dag: Baklengs repetisjon (del 2 av 3)

Integrasjonsteknikker og anvendelser av integrasjon

Eks. Finn et eksempel på et ubestemt integral som kan løses ved å bruke substitusjonen $u = \sin x$ og deretter delvis integrasjon.

Løsn.

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}\, dx = \int \sin x\, e^{\sin x} \cos x\, dx$$

$$\boxed{u = \sin x \quad \frac{du}{dx} = \cos x \qquad du = \cos x\, dx}$$

$$= \int u e^u\, du$$

$$= u e^u - \int 1 \cdot e^u\, du = u e^u - e^u + C$$

$$\boxed{\text{Delvis} \quad F(u) = u \quad G'(u) = e^u \qquad F'(u) = 1 \quad G(u) = e^u}$$

$$= \sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x} + C$$

Integral: $\int \sin x \cos x\, e^{\sin x}\, dx$

Eks. Samme med $u = \sqrt{1+x^2}$. Har:

$$\boxed{u = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{gir} \quad \frac{du}{dx} = \cancel{\tfrac{1}{2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x \qquad du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx}$$

Får da

$$\int x e^{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \cancel{\sqrt{1+x^2}}\, e^{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\cancel{\sqrt{1+x^2}}}\, dx$$

$$\boxed{u = \sqrt{1+x^2}}$$

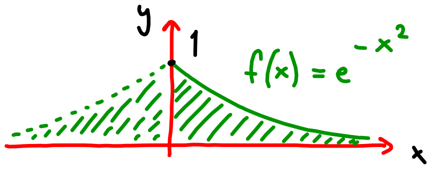
$$= \int u e^u\, du = u e^u - e^u + C$$

som før

$$= \sqrt{1+x^2}\, e^{\sqrt{1+x^2}} - e^{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Eks. Uttrykk volumet V av omdreiningslegemet som fås når grafen til $f(x) = e^{-x^2}$ på $[0, \infty)$ roteres om y-aksen som et uegentlig integral, og finn V.

Løsn.



Formel:

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

(volum av omdr. legeme om y-aksen)

Vi får i vårt tilfelle

$$\underline{\underline{V = 2\pi \int_0^\infty x e^{-x^2} dx}}$$

Dette gir

$$V = \lim_{b \to \infty} 2\pi \int_0^b x e^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b$$

Kan bruke $u = -x^2$, $\frac{du}{dx} = -2x$ osv.

$$= \cancel{2}\pi \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{\cancel{2}} e^0 - \frac{1}{2} e^{-b^2} \right] = \pi \cdot e^0$$

$e^{-b^2} \to 0$

$$= \underline{\underline{\pi}}$$

Eks. Finn et eksempel på et uegentlig integral som man kan avgjøre om konvergerer ved å bruke grensesammenlikningstesten (GS-testen) for integraler.

Løsn. Vi velger $\int_2^\infty \frac{1}{x^3 - x^2}\, dx$

GS-testen, sammenlikner med $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx$

som vi vet at konvergerer (p-integral med $p = 3$)

Vi får:

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^3 - x^2}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 - x^2}$$

Deler på dominerende ledd x^3

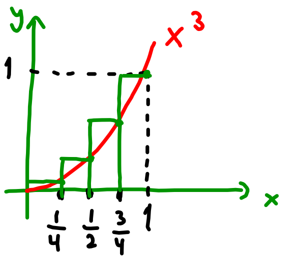
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = 1$$

Altså konvergerer integralet vårt ved GS-testen.

Integrasjonsteori

Eks. La Π være en partisjon av $[0,1]$ i 4 like lange delintervaller. Finn den øvre trappesummen $\emptyset(\Pi)$ for $f(x) = x^3$ basert på Π.

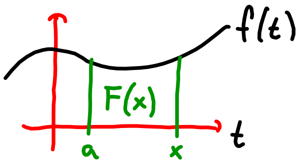
Løsn.



Π er partisjonen $\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}\}$

Ser at
$$\emptyset(\Pi) = f\left(\tfrac{1}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + f\left(\tfrac{3}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + f(1)\cdot\tfrac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{4}{4}\right)^3\right]$$
$$= \frac{1}{4^4}\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3\right]$$
$$= \frac{1}{256}\left[1 + 8 + 27 + 64\right] = \frac{100}{256}$$

Dette gir (integrasjonsteori) etter hvert fundamentalteoremet:



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
$$\Rightarrow \quad F'(x) = f(x) \qquad \text{(ved kont.)}$$

$\boxed{\text{Teori for derivasjon}}$

Eks. La $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x}{\sin x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Avgjør om f er kontinuerlig og eventuelt deriverbar i $x = 0$.

Løsn.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot \cos x + \overbrace{x \cdot (-\sin x)}^{\to 0}}{\cos x} = 1 = f(0)$$

Altså er f kontinuerlig i $x = 0$. Videre:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cos h}{\sin h} - 1}{h} \quad \begin{matrix} \cdot \sin h \\ \cdot \sin h \end{matrix}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cos h - \sin h}{h \sin h}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - h \sin h - \cos h}{\sin h + h \cos h}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{\sin h} - \underbrace{(\sin h - h \cos h)}_{\to 0} + \cancel{\sin h}}{\cos h + \cos h \underbrace{- h \sin h}_{\to 0}} = \frac{0}{2} = 0$$

Altså er f deriverbar i $x = 0$, med $f'(0) = 0$.