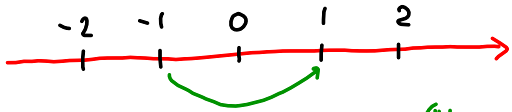
Det komplekse tallsystemet $\mathbb{C}$

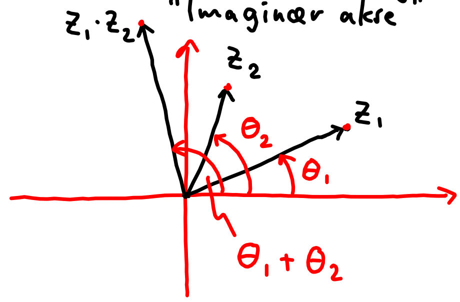
$\mathbb{R}$: Mengden av reelle tall



Tallene har fortegn
$+$ eller $-$

$(-1)\cdot(-1) = 1$ ("dreier rundt" → idé ?)

Utvider til $\mathbb{C}$: Tillater kontinuerlig varierende "fortegnsvinkel" θ

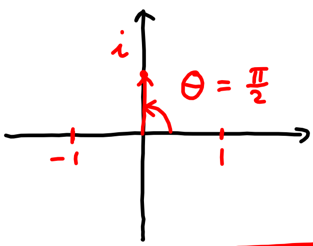


her ligger $\mathbb{R}$ ("reell akse")

Multipliserer komplekse tall ved å addere vinklene (med fortegn) og multiplisere lengden av pilene

Adderer og subtraherer som vektorer.

Vi setter $a \overset{\text{def}}{=} (a, 0)$ og $i \overset{\text{def}}{=} (0, 1)$



Lengde 1

Vi har da $\boxed{i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1}$

Vi får da: (setning 3.2.5 i boken)

Algebraiske egenskaper ved komplekse tall

For alle komplekse tall z_1, z_2 og z_3 gjelder

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$z_1 + 0 = z_1 \quad \text{og} \quad z_1 \cdot 1 = z_1$$

$\boxed{\text{Husk: } 0 \overset{\text{def}}{=} (0,0) \text{ og } 1 \overset{\text{def}}{=} (1,0)}$

For hvert komplekst tall z fins et komplekst tall $-z$ slik at $z + (-z) = 0$

Hvis $z \neq 0$, fins også et komplekst tall z^{-1} slik at

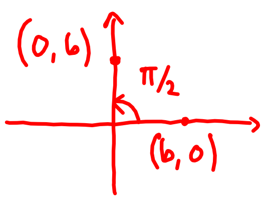
$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Bevis Snakket. Til det siste: Hvis z har vektorlengde r og vinkel θ, så la z^{-1} ha lengde $\frac{1}{r}$ og vinkel $-\theta$. □

Alle algebraiske regler for reelle tall følger fra disse reglene, se kap. 2. Vi kan dermed regne helt "normalt" med komplekse tall, og bruke at $i^2 = -1$. Vi kan også gå inn i hvert komplekst tall og "herje" med det. Vi har:

$$(a,b) = (a,0) + \overbrace{(0,b)}^{\text{vinkel } \frac{\pi}{2}}$$

$$= (a,0) + \underbrace{(b,0)}_{\substack{\text{vinkel} \\ \theta = 0}} \cdot \underbrace{(0,1)}_{\substack{i \\ \theta = \frac{\pi}{2}}} = \underline{\underline{a + bi}}$$



Eksempler:

$3 + 2i = 2i + 3 = i \cdot 2 + 3 =$ etc. ("herjing")

$i(-2) + 5 = 5 - 2i = 5 + (-2)i$ (punktet $(5,-2)$)

$$(4+3i)\cdot(2+i) = 4\cdot 2 + 4\cdot i + 3i\cdot 2 + 3i^{2}\,{}^{-1}$$
$$= 8 + 4i + 6i - 3 = 5 + 10i$$

$$(2+7i) - (-2+3i) = 2 + 7i + 2 - 3i = 4 + 4i$$

Å skrive et komplekst tall på formen $\boxed{z = a + bi}$
kalles å skrive z på rektangulær eller kartesisk form.